

SPEZIELLE PERIODISCHE LÖSUNGEN
EINIGER AUTONOMER ZEITVERZÖGERTER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT SYMMETRIEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

1981

vorgelegt von
Norbert Angelstorf
aus Dinslaken

Bremen 1980



SPEZIELLE PERIODISCHE LÖSUNGEN
EINIGER AUTONOMER ZEITVERZÖGERTER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT SYMMETRIEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

vorgelegt von
Norbert Angelstorf
aus Dinslaken

Bremen 1980

Die Dissertation lag dem Promotionsausschuß Dr.-Ing./
Dr. rer. nat. der Universität Bremen vor. An dem Promotions-
verfahren haben Prof. Dr. H.-O. Peitgen und Prof. Dr. K. P.
Hadeler als Gutachter mitgewirkt. Das Kolloquium fand am
16. Februar 1981 statt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel I	8
§ 1 Die Gleichung $u'(t) = -f(u(t-1))$	8
§ 2 Kontinua periodischer Lösungen der parameterabhängigen Gleichung $u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$	30
§ 3 Strukturell andersartige periodische Lösungen von $u'(t) = -f(u(t-1))$	45
Kapitel II	67
§ 4 Die Gleichung $u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$	67
§ 5 Kontinua periodischer Lösungen der parameterabhängigen Gleichung $u'(t) = -\lambda \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$	76
Kapitel III	82
§ 6 Kurze Einführung des Riemann-Stieltjes- Integrals	83
§ 7 Gleichungen mit symmetrisch verteilter Verzögerung	86
§ 8 Weitere Resultate und Bemerkungen	108
§ 9 Schlußbemerkung	112
Kapitel IV	115
§ 10 Zeitverzögerte Differentialgleichun- gen zweiter Ordnung	115
Erläuterungen zu einigen Notationen und Begriffen	131
Literaturverzeichnis	133



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543123_0020

Einleitung

Die meisten grundlegenden Arbeiten zum Problem der Existenz periodischer Lösungen nichtlinearer, zeitverzögerter Differentialgleichungen - also von Differentialgleichungen, bei denen die gegenwärtige Zustandsänderung von der Vergangenheit abhängt - beruhen im wesentlichen auf Linearisierungen der auftretenden Nichtlinearitäten in "0" (und z.T. in " ∞ ") und dem Studium der sogenannten charakteristischen Gleichungen der zugehörigen linearisierten Gleichungen, um daraus auf das asymptotische Verhalten der Lösungstrajektorien der nichtlinearen Gleichung zu schließen (Phasenraummethode, Kaplan und Yorke [20]; asymptotische Fixpunkttheorie, Nussbaum [25], Hadeler [12] u.a.).

Eine typische Vorgehensweise soll hier für die wohl einfachste nichtlineare, zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(I) \quad u'(t) = -f(u(t-1))$$

kurz skizziert werden. Wir wollen dabei annehmen, daß die stetige Nichtlinearität $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in 0 differenzierbar ist mit $\alpha := f'(0)$ und $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ erfüllt.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erweist sich die Nulllösung $u \equiv 0$ von (I) als stabil bzw. instabil, wenn für die linearisierte Gleichung

$$(L) \quad u'(t) = -\alpha u(t-1)$$

die Nulllösung stabil bzw. instabil ist. Darüber wiederum

entscheidet die Lage der Wurzeln der sogenannten charakteristischen Gleichung

$$(C) \quad \lambda + \alpha e^{-\lambda} = 0,$$

die man aus (L) durch den Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ erhält.

Ist nun $\alpha < \frac{\pi}{2}$, so haben alle Lösungen von (C) einen negativen Realteil. Daraus folgt (etwa mit dem Theorem 1.6.2 von Hale [14]), daß die Nulllösung für (L) und damit für (I) stabil ist.

Für $\alpha > \frac{\pi}{2}$ besitzt (C) Lösungen $\lambda(\alpha)$ mit positivem Realteil, was, wie Nussbaum in [25] zeigte, die folgende Instabilitätseigenschaft der Nulllösung $u \equiv 0$ von (I) impliziert:

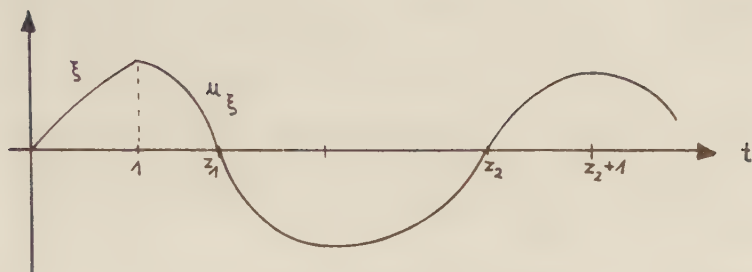
Es gibt ein $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) > 0$, so daß gilt:

$$(\dagger) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)| > \varepsilon$$

für jede stetige Funktion $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ($u \not\equiv 0$), die für $t > 1$ stetig differenzierbar ist und dort der Gleichung (I) genügt und für die $u|_{[0,1]}$ enthalten ist in

$$P := \{ \xi \in C[0,1] \mid \xi(0) = 0 \text{ und } \xi \text{ monoton wachsend} \}.$$

Nun gibt es, wie man sich leicht überlegt, zu jedem $\xi \in P$ eine eindeutig bestimmte, stetige Funktion $u_\xi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die für $t > 1$ stetig differenzierbar ist, dort der Gleichung (I) genügt und die auf $[0,1]$ mit ξ übereinstimmt. Falls $\xi \in P \setminus \{0\}$ und $\alpha > 1$ ist, lassen sich die Nullstellen von u_ξ , die strikt größer als 1 sind, in einer Folge (z_n) , $n \in \mathbb{N}$, mit $z_n + 1 < z_{n+1}$ anordnen.



Ordnen wir nun jeder Funktion $\xi \in P \setminus \{0\}$ die durch $T\xi(t) := u_\xi(z_2+t)$, $0 \leq t \leq 1$, definierte Funktion $T\xi \in C[0,1]$ zu und ergänzen wir die Abbildung T in $0 \in P$ durch $T(0) := 0$, so ist der dadurch definierte Operator (der sogenannte Verschiebeoperator) $T: P \rightarrow C[0,1]$ vollstetig, und es gilt $T(P) \subset P$, wie Nussbaum in [25] zeigte.

Dabei impliziert - falls $\alpha > \frac{\pi}{2}$ - die Instabilitätseigenschaft (+), daß $0 \in P$ ein sogenannter ejektiver Fixpunkt von T ist. Setzen wir nun zusätzlich voraus, daß die Nichtlinearität f etwa nach unten beschränkt ist, so ist $T(P)$ eine relativ kompakte Teilmenge von P , und mit dem Browder - Horn'schen Fixpunktprinzip folgt dann die Existenz eines nichtejektiven und somit eines nichttrivialen Fixpunktes $\xi \in P$ von T . Aufgrund der Definition von T und der Autonomie der Gleichung (I) muß u_ξ dann eine nichttriviale periodische Lösung von (I) sein.

Diese hier kurz skizzierte Beweisidee führte auch bei einer Reihe weiterer zeitverzögerter Differentialgleichungen.

chungen zum Ziel. So konnten etwa Haderer [12] für Gleichungen des Typs $u'(t) = -f(u(t), u(t-1))$ und Walther

[42] für Gleichungen des Typs $u'(t) = - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(u(t+a)) da$

die Existenz nichttrivialer periodischer Lösungen beweisen.

Die typischen Schwierigkeiten, die bei diesen und anderen Gleichungen auftreten, sind z.B.

- eine Analyse der Wurzeln der transzendenten charakteristischen Gleichung zu leisten und
- einen geeigneten Definitionsbereich zu finden, der vom Verschiebeoperator invariant gelassen wird und in dem der triviale Fixpunkt tatsächlich ektiv ist.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten gibt es etwa für das Periodizitätsproblem bei zeitverzögerten Differentialgleichungen der Gestalt

$$(III) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da \quad (a)$$

bisher keine Existenzresultate, wenn die monotone Funktion $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ nicht konstant ist auf $[-\frac{1}{2}, 0]$.

Zugleich aber sind viele durch numerische Studien (Jürgens, Peitgen, Saupe [18]) und durch Untersuchungen an unstetigen Modellnichtlinearitäten (Peters [37]) bekannte Phänomene, selbst für das Periodizitätsproblem für die Gleichung (I) bzw. die parameterabhängige

Gleichung

$$(I_\lambda) \quad u'(t) = -\lambda f(u(t-1)), \quad \lambda > 0,$$

der oben beschriebenen Beweistechnik kaum zugänglich.

Zu diesen Phänomenen zählen etwa:

- Existenz periodischer Lösungen von (I), auch wenn die Vorzeichenbedingung ($f(x)x > 0$ für $x \neq 0$) nicht erfüllt ist,
- Eindeutigkeitsresultate,
- Multiplizität strukturell gleichartiger oder verschiedenartiger periodischer Lösungen von (I),
- Parametrisierbarkeit von Kontinua periodischer Lösungen von (I_λ) ,
- Sekundärverzweigung (also Verzweigung nichttrivialer periodischer Lösungen von (I_λ) von nichttrivialen periodischen Lösungen) und schließlich sogar
- "chaotisches" Verhalten des Periodizitätsproblems für (I) und (I_λ) .

Ein erster theoretischer Zugang zu einigen dieser Phänomene konnte für stetige, ungerade Nichtlinearitäten f von Nussbaum in [27], dem Autor in [3] und in der hier vorliegenden Arbeit (Kapitel I) gefunden werden. Die Symmetrievoraussetzung " f ungerade" impliziert nämlich die Existenz periodischer Lösungen von (I) mit ausgezeichneten, "sinusartigen" Symmetrieeigenschaften, die sich aus gewissen Lösungen eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ergeben (vergl. Kaplan und Yorke [19]), die man aber auch

als Fixpunkte eines Operators erhält, der wesentlich einfacher zu handhaben ist als der Verschiebeoperator.

Diese grundlegende Beobachtung für das Periodizitätsproblem für die Gleichung (I) läßt sich auf eine Reihe weiterer zeitverzögerter Differentialgleichungen übertragen, sofern man geeignete Symmetrievoraussetzungen stellt. So konnte Nussbaum [30] für Gleichungen der Gestalt

$$u'(t) = - \sum_{i=0}^n f_i(u(t-\gamma_i)) + f_i(u(t+\gamma_i-q))$$

mit $q > 0$, $0 \leq \gamma_i \leq q$ für $0 \leq i \leq n$, die Existenz periodischer Lösungen nachweisen, wenn die Nichtlinearitäten $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, als ungerade vorausgesetzt werden.

Dieses Resultat von Nussbaum werden wir in dieser Arbeit im Kapitel III verwenden, um für Gleichungen der Gestalt

$$(III) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, d\mu(a)$$

auch dann die Existenz periodischer Lösungen nachzuweisen, wenn die monotone Funktion μ gewisse Symmetrieeigenschaften besitzt, aber nicht notwendig konstant ist auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, 0]$.

Im Kapitel IV schließlich wird die Existenz periodischer Lösungen für solche zeitverzögerten Differentialgleichungen 2. Ordnung nachgewiesen, die Symmetrieeigenschaften haben, die insbesondere von der folgenden Van der Pol - Gleichung mit Verzögerung erfüllt sind:

$$u''(t) + a(1 - (u(t-1))^2) u'(t-1) + u(t) = 0, \quad a > 0.$$

Dankadresse

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. H.-O. Peitgen danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die weitreichende Unterstützung während ihrer Entstehung.

Ferner gilt mein Dank meinen Kollegen H. Peters und H.W. Siegberg, die mir in vielen Diskussionen mit Kritik und Ratschlägen zur Seite standen.

Für die großzügige Förderung während des Entstehens dieser Arbeit gilt mein Dank dem ehemaligen Leiter der Abteilung für Funktionalanalysis und Numerische Mathematik Herrn Prof. Dr. H. Unger und der Deutschen Forschungsgemeinschaft und ihrem Sonderforschungsbereich 72 am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn, vertreten durch seinen Sprecher Herrn Prof. Dr. S. Hildebrandt und den für mich zuständigen Projektleiter Herrn Prof. Dr. K. Scherer.

Kapitel I

§ 1 Die Gleichung $u'(t) = -f(u(t-1))$

Wir wollen in diesem Paragraphen das Periodizitätsproblem für die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(I) \quad u'(t) = -f(u(t-1))$$

für ungerade (d.h. $f(x) = -f(-x)$) und stetige Nichtlinearitäten $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untersuchen und uns dabei zunächst darauf beschränken, spezielle periodische Lösungen von (I) zu finden. Ein Beispiel dafür ist schon 1964 von Jones [17] untersucht worden. Er beobachtete, daß die Gleichung

$$(I1) \quad y'(t) = -\alpha y(t-1)(1-(y(t))^2),$$

die durch die Transformation $y = (e^{2x}-1)/(e^{2x}+1)$ in eine Gleichung der Form (I) mit ungerader Nichtlinearität übergeht, für $\alpha > \pi/2$ periodische Lösungen besitzt, die alle exakt die Periode 4 haben.

Kaplan und Yorke konnten in [19] zeigen, daß, wenn f eine ungerade und stetige Funktion (mit gewissen weiteren Eigenschaften) ist, das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$(2) \quad \begin{aligned} u' &= -f(v) \\ v' &= f(u) \end{aligned}$$

nur periodische Lösungen besitzt und daß für eine Lösung

(u, v) von (*) mit Periode 4 notwendig $v(t) = u(t-1)$ gilt, daß also u eine periodische Lösung von (I) ist. Durch Abschätzungen des asymptotischen Verhaltens der Perioden der Lösungen von (*) konnten sie dadurch den folgenden Satz beweisen:

Satz ([19])

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ungerade und erfülle $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$. Außerdem mögen

$$F(x) := \int_0^x f(s) \, ds \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

gelten und die folgenden Limits in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ existieren:

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Gilt dann entweder $\alpha < \pi/2 < \beta$ oder $\alpha > \pi/2 > \beta$, so besitzt (I) eine nichttriviale periodische Lösung mit Periode 4.

Wir werden das Konzept des Beweises dieses Satzes noch zur globalen Parametrisierung von Kontinua periodischer Lösungen der parameterabhängigen Gleichung

(I.) $u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$ im folgenden Paragraphen verwenden.

Die Beobachtung, daß diese speziellen periodischen Lösungen ausgezeichnete Symmetrieeigenschaften besitzen, führten den Autor [3] und R. Nussbaum [30] unabhängig voneinander zu äquivalenten Formulierungen des Periodizitätsproblems als Fixpunktproblem.

Es bezeichne X den Banachraum aller stetigen Funktionen $\xi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\xi(0) = 0$, versehen mit der Supremums-Norm.

Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in X$ und $t \in [0,1]$ definieren wir

$$R_f \xi(t) := \int_0^t f(\xi(1-s)) \, ds.$$

Man überlegt sich leicht, daß dadurch ein stetiger Operator von X in sich definiert ist, dessen Bilder stetig differenzierbar sind (in den Randpunkten einseitig). Außerdem haben die Bilder beschränkter Teilmengen von X unter R_f gleichmäßig beschränkte Ableitungen. Daraus folgt mit dem Satz von Arzela-Ascoli, daß $R_f: X \rightarrow X$ ein vollstetiger Operator ist.

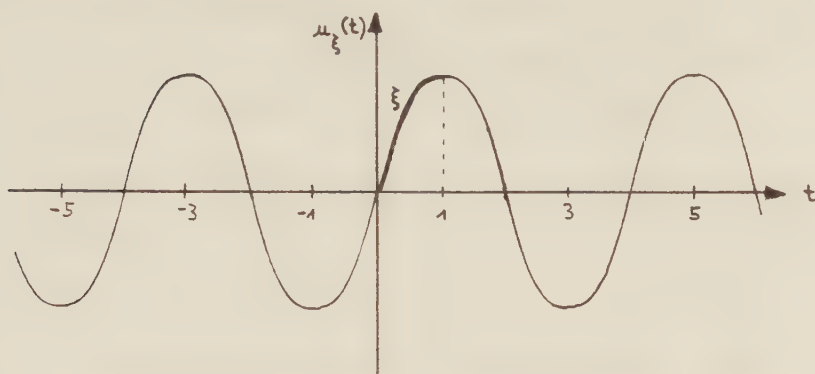
Der Zusammenhang zwischen dem Periodizitätsproblem für die Gleichung (I) und dem Operator R_f wird sofort aus dem folgenden Satz deutlich:

(1.1) Satz

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade, stetige Funktion. Dann besitzt $R_f: X \rightarrow X$ einen nichttrivialen Fixpunkt ξ genau dann, wenn (I) eine nichttriviale periodische Lösung $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, für die $u(-t) = -u(t)$ und $u(t+2) = -u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie $u|_{[0,1]} = \xi$ gilt.

Beweis: " $\Rightarrow$ " Sei $\xi \in X$ ein nichttrivialer Fixpunkt von R_f , also $\xi \neq 0$ und $R_f(\xi) = \xi$. Dann definieren wir die

Funktion $u_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte Funktion, die auf $[0,1]$ mit ξ übereinstimmt und für die $u_\xi(-t) = -u_\xi(t)$ und $u_\xi(t+2) = -u_\xi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.



Es gilt $R_f \xi = \xi$, also ist ξ stetig differenzierbar (in den Punkten 0 und 1 einseitig). Da aber $\xi'(1) = 0$ gelten muß, folgt daraus sofort die Differenzierbarkeit von u_ξ . Wir wollen zeigen, daß u_ξ eine periodische Lösung von (I) ist. Aufgrund der Autonomie von (I) und den Symmetrieeigenschaften von u_ξ und f genügt es, die Behauptung für $t \in [0,2]$ zu zeigen.

Sei zunächst $t \in [0,1]$, dann gilt:

$$u'_\xi(t) = \xi'(t) = f(\xi(1-t)) = f(u_\xi(1-t)) = -f(u_\xi(t-1)).$$

Für $t \in [1,2]$ haben wir $u_\xi(t) = -u_\xi(t-2) = u_\xi(2-t)$, und es gilt $2-t \in [0,1]$, also:

$$u'_\xi(t) = -u'_\xi(2-t) = f(u_\xi(1-t)) = f(-u_\xi(t-1)) = -f(u_\xi(t-1)).$$

u_ξ ist also tatsächlich eine periodische Lösung von (I).

" $\Leftarrow$ " Sei u eine periodische Lösung von (I) mit $u(-t) = -u(t)$ und $u(t+2) = -u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Definiert man $\xi := u|_{[0,1]}$, dann gilt für alle $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \underbrace{\xi(0)}_0 + \int_0^t \xi'(s) \, ds = \int_0^t -f(u(s-1)) \, ds \\ &= \int_0^t f(u(1-s)) \, ds = \int_0^t f(\xi(1-s)) \, ds.\end{aligned}$$

Also ist ξ tatsächlich Fixpunkt von R_f . q.e.d.

In allen bekannten Resultaten für das Periodizitätsproblem für die Gleichung (I) wird an f die Voraussetzung $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ (z.B. [19], [25]) bzw. die Voraussetzung $f(x)x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (z.B. [4], [30]) gestellt und unter geeigneten asymptotischen Bedingungen an f die Existenz sogenannter langsamschwingender periodischer Lösungen (das sind solche, bei denen der Abstand zweier aufeinanderfolgender Nullstellen größer als 1 ist) nachgewiesen.¹⁾ Ist u_0 eine solche langsamschwingende periodische Lösung von (I) mit Periode $p > 0$, so sind, wie Jones beobachtete, für alle $n \in \mathbb{N}$ die periodischen Funktionen $u_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u_n(t) = u_0((np+1)t)$ periodische Lösungen von $u_n'(t) = -(np+1) f(u_n(t-1))$, die offensichtlich nicht langsamschwingend sind.

¹⁾ R. Nussbaum und H.-O. Peitgen haben eine Arbeit angekündigt, in der sie mit globalen topologischen Perturbationsargumenten (analog zu denen in [35] für einfache Randwertaufgaben) die Existenz periodischer Lösungen von (I) ohne die Voraussetzung $f(x)x \geq 0$ nachweisen. Ihre Ergebnisse sind aber ebenfalls auf ungerade Nichtlinearitäten beschränkt.

Beschränkt man sich nun auf ungerade Funktionen f mit $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ und auf die periodischen Lösungen von (I) mit den ausgezeichneten Symmetrieeigenschaften, so ist in einem gewissen Sinne auch die Umkehrung dieses Sachverhalts richtig. Wir wollen das präzisieren: Ist u eine beliebige nichttriviale periodische Lösung von (I) mit Periode $p > 0$, die $u(-t) = -u(t)$ und $u(t+2) = -u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, so muß $p \leq 4$ gelten. Außerdem überlegt man sich leicht, daß das Funktionenpaar (u, v) mit $v(t) := u(t-1)$, $t \in \mathbb{R}$, eine periodische Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$(*) \quad \begin{cases} u' = -f(v) \\ v' = f(u) \end{cases}$$

ist. Mit den Argumenten von Kaplan und Yorke in [19] (vergl. Lemma 2.3 in dieser Arbeit) folgt daraus:

Hat u die Periode $p = 4$, so gilt $u(t) > 0$ bzw. $u(t) < 0$ für alle $t \in (0, 2)$, also ist u langsamschwingend.

Ist dagegen die Periode p von u kleiner als 4, so werden durch $u_p(t) := u(\frac{p}{4}t)$ und $v_p(t) := v(\frac{p}{4}t)$ zwei Funktionen $u_p, v_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die beide die Periode 4 haben und das System

$$**) \quad \begin{cases} u_p' = -\frac{p}{4} f(v_p) \\ v_p' = \frac{p}{4} f(u_p) \end{cases}$$

erfüllen. Mit den Argumenten von Kaplan und Yorke ([19]) folgt dann, daß $v_p(t) = u_p(t-1)$, $t \in \mathbb{R}$, gelten muß und

daß u_p eine langsamschwingende periodische Lösung von $u'_p(t) = -\frac{p}{4} f(u_p(t-1))$ ist.

Wir werden uns aus diesem Grund, auch wenn wir nicht immer $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ voraussetzen werden, in diesem Paragraphen darauf beschränken, nur nach der Existenz periodischer Lösungen von (I) vom Typ (H_4) zu fragen. Darunter wollen wir verstehen:

(1.2) Definition

Eine periodische Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt vom Typ (H_4) , wenn gilt:

$$(1.2.1) \quad u(t) > 0 \text{ für } 0 < t < 2$$

$$(1.2.2) \quad u(-t) = -u(t) \text{ und } u(t+2) = -u(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ist $\tilde{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (I), die der Bedingung (1.2.2) genügt, für die aber $\tilde{u}(t) < 0$ für $0 < t < 2$ gilt, so ist, da wir die Nichtlinearität f als ungerade voraussetzen, $u := -\tilde{u}$ eine periodische Lösung von (I) vom Typ (H_4) . Unter diesem Aspekt stellt die Bedingung (1.2.1) keine Beschränkung dar.

Die periodischen Lösungen von (I) vom Typ (H_4) entsprechen gerade solchen Fixpunkten $\tilde{f}$ des Operators R_f , die positiv auf dem Intervall $(0,1]$ sind, die also insbesondere im Kegel $K \subset X$ der nichtnegativen stetigen Funktionen aus X liegen. Man überlegt sich leicht, daß R_f den Kegel K invariant läßt, falls $f(x)x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ja daß die Bilder von Elementen aus K unter dieser Voraussetzung sogar monoton wachsend sind. Deshalb könnte

man mit klassischen Kegelmethode (Krasnoselskii [21]) versuchen, die Existenz periodischer Lösungen von (I) vom Typ (H_4) nachzuweisen. Wir werden dieser Vorgehensweise im Kapitel III für die allgemeinere Gleichung

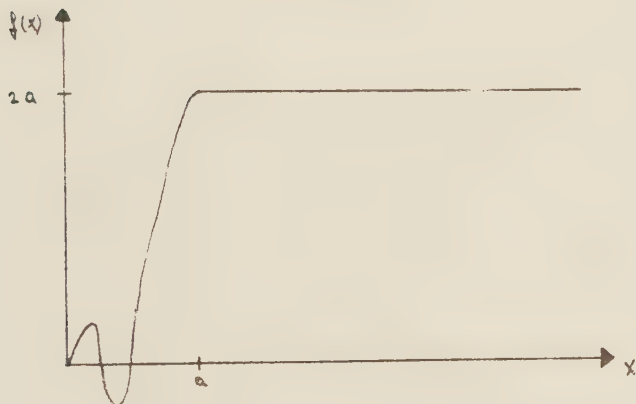
$$u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, d\mu(a) \text{ auch folgen. Für die Gleichung (I) hingegen wählen wir einen elementareren Weg, der zugleich auch weitergehende Resultate bringt.}$$

Wir wollen zunächst ein einfaches Beispiel diskutieren, für welches wir einen Fixpunkt von R_f (und damit wegen Satz (1.1) eine periodische Lösung von (I)) explizit berechnen können.

(1.3) Beispiel

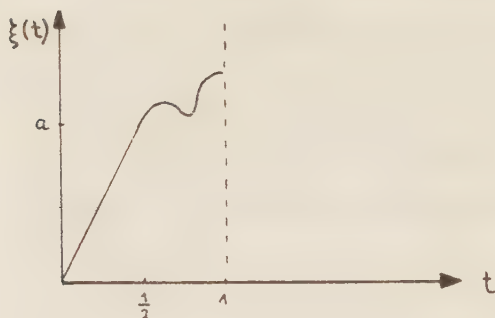
Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade stetige Funktion derart, daß $f(x) = 2a$ für alle $x \geq a > 0$ gilt. Weiterhin wollen wir annehmen, daß für $0 \leq x \leq a$ gilt:

$$(1.3.1) \quad \int_x^a f(u) \, du \geq 0.$$



Dann ist $\xi \in K$ mit

$$\xi(t) = \begin{cases} 2at & \text{für } t \in [0, 1/2] \\ a + \int_{1-t}^{1/2} f(2as) \, ds & \text{für } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$



ein Fixpunkt des Operators R_f .

Beweis: Aus (1.3.1) folgt $\int_{1-t}^{1/2} f(2as) \, ds \geq 0$ und damit

$f(\xi(t)) = 2a$ für alle $t \in [1/2, 1]$. Deshalb gilt für $t \in [0, 1/2]$:

$$R_f \xi(t) = \int_0^t f(\xi(1-s)) \, ds = \int_0^t 2a \, ds = 2at.$$

Für $t \in [1/2, 1]$ haben wir:

$$\begin{aligned} R_f \xi(t) &= a + \int_{1/2}^t f(\xi(1-s)) \, ds = a + \int_{1-t}^{1/2} f(\xi(s)) \, ds = \\ &= a + \int_{1-t}^{1/2} f(2as) \, ds = \xi(t). \end{aligned}$$

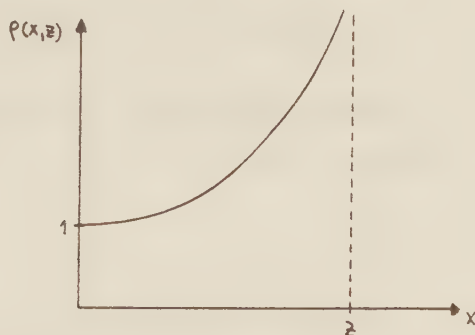
ξ ist also tatsächlich Fixpunkt von R_f .

Wir wollen jetzt das zentrale Resultat dieses Paragraphen formulieren und beweisen.

(1.4) Satz

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade, stetige Funktion. Ferner definieren wir für positive reelle Zahlen z und für $0 \leq x < z$:

$$\rho(x, z) := \left(1 - \frac{x^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$



Es gebe Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a \leq b$ und monoton wachsende stetige Funktionen $h, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß

$$(1.4.1) \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq b,$$

$$(1.4.2) \quad \int_x^b (g(s) - \frac{\pi}{2} s) \rho(s, b) ds \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq b,$$

$$(1.4.3) \quad \int_x^a (h(s) - \frac{\pi}{2} s) \rho(s, a) ds \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq a.$$

Dann besitzt (I) $u'(t) = -f(u(t-1))$ eine periodische Lösung u vom Typ (H_4) mit

$$a \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| \leq b.$$

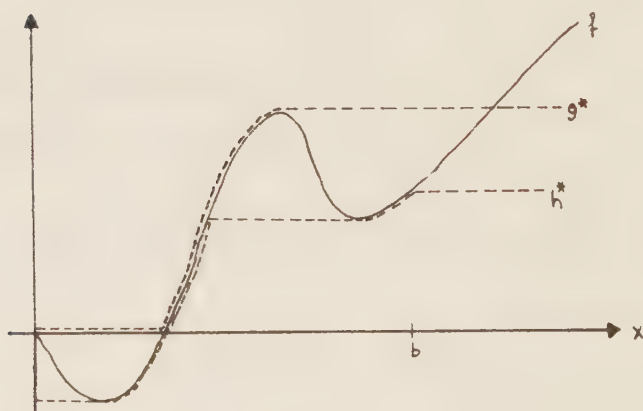
Ehe wir den Satz beweisen, wollen wir die Voraussetzungen an Beispielen und Skizzen illustrieren und ein einfaches Anwendungsbeispiel diskutieren.

(1.5) Beispiel

Ist $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $b > 0$, so ist durch

$$h^*(x) := \begin{cases} \min_{x \leq s \leq b} f(s) & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ f(b) & \text{für } x > b \end{cases}$$

eine monoton wachsende, stetige Funktion $h^*: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, für die $h^*(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [0, b]$ gilt.



h^* ist die "größte" monoton wachsende, stetige Funktion, die diese Bedingung erfüllt. Entsprechend definiert man durch

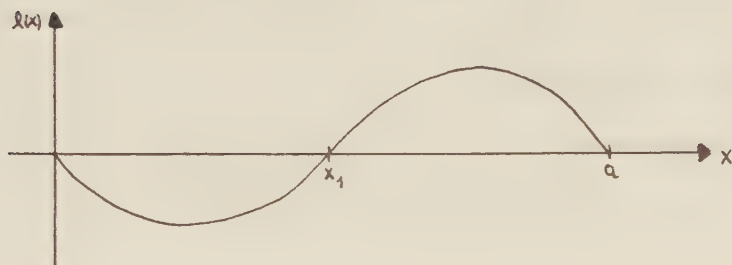
$$g^*(x) := \begin{cases} \max_{0 \leq s \leq x} f(s) & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ \max_{0 \leq s \leq b} f(s) & \text{für } x > b \end{cases}$$

die "kleinste" monoton wachsende stetige Funktion, für

die $f(x) \leq g^*(x)$ für alle $x \in [0, b]$ gilt.

Zur Veranschaulichung von Bedingung (1.4.3)

$l(x) := h(x) - \frac{\pi}{2} x$ habe für $0 \leq x \leq a$ etwa den folgenden Graphen:



Durch die Multiplikation von l mit $\rho(x, a)$ wird l auf (x_1, a) , wo l positiv ist, stärker gewichtet als auf $(0, x_1)$, wo l negativ ist. Das verdeutlicht, warum die Bedingungen (1.4.2) und (1.4.3) insbesondere dann erfüllt sind, wenn

$$(1.4.4) \quad \int_x^b g(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds \leq 0 \text{ für } 0 \leq x \leq b$$

und

$$(1.4.5) \quad \int_x^a h(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds \geq 0 \text{ für } 0 \leq x \leq a \text{ gilt.}$$

Außerdem überlegt man sich sofort, daß, falls f selbst monoton ist, es genügt, die Bedingungen (1.4.4) und (1.4.5) für $g = f = h$ zu überprüfen (vergl. [4]).

(1.6) Beispiel

Sei $f(x) := \frac{\pi}{2} x + \sin(\frac{\pi}{2} x)$. f ist stetig, ungerade und selbst schon monoton wachsend. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 4n-2]$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_x^{4n-2} f(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds &= \int_x^{4n-2} \sin(\frac{\pi}{2} s) \, ds = \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - \cos(\frac{\pi}{2} x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für $x \in [0, 4n]$:

$$\int_x^{4n} f(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds = \frac{2}{\pi} (-1 + \cos(\frac{\pi}{2} x)) \leq 0.$$

Also sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen (1.4.4) und (1.4.5) für $g = f = h$ und für $a = 4n-2$ und $b = 4n$ erfüllt.

Damit erhalten wir mit Satz (1.4) für alle $n \in \mathbb{N}$ eine periodische Lösung u_n von (I) vom Typ (H_4) mit $4n-2 \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| \leq 4n$. Wie wir noch sehen werden (Satz (1.11)), gibt es aber noch weitere, von diesen verschiedene periodische Lösungen von (I) vom Typ (H_4) .

Beweis von Satz (1.4)

Wir werden zeigen, daß für jedes

$$\xi \in \Lambda := \{ \xi \in X \mid a \sin(\frac{\pi}{2} \cdot) \leq \xi \leq b \sin(\frac{\pi}{2} \cdot) \}$$

auch $R_f \xi \in \Lambda$ ist, daß also

$$a \sin(\frac{\pi}{2} t) \leq R_f \xi(t) = \int_0^t f(\xi(1-s)) \, ds \leq b \sin(\frac{\pi}{2} t)$$

für alle $t \in [0, 1]$ gilt.

A ist eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge, R_f ein vollstetiger Operator, der A invariant läßt, also muß R_f nach dem Schauder'schen Fixpunktsatz einen Fixpunkt ξ_0 in A haben, der trivialerweise der Abschätzung $a \leq \|\xi_0\| \leq b$ genügt. Mit Satz (1.1) folgt dann die Behauptung.

Für den Beweis der Invarianz von A unter R_f genügt es, für alle $t \in [0,1]$ zu zeigen:

$$(i) \quad \int_0^t g(b \sin(\frac{\pi}{2}(1-s))) ds \leq b \sin(\frac{\pi}{2} t)$$

und

$$(ii) \quad \int_0^t h(a \sin(\frac{\pi}{2}(1-s))) ds \geq a \sin(\frac{\pi}{2} t).$$

Denn da $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$ für alle $x \in [0,b]$ gilt und da g und h monoton wachsend sind, folgt dann für ein beliebiges $\xi \in A$ und für alle $t \in [0,1]$:

$$a \sin(\frac{\pi}{2} t) \leq \int_0^t h(a \sin(\frac{\pi}{2}(1-s))) ds \leq \int_0^t h(\xi(1-s)) ds$$

$$\leq R_f \xi(t) \leq \int_0^t g(\xi(1-s)) ds \leq \int_0^t g(b \sin(\frac{\pi}{2}(1-s))) ds$$

$$\leq b \sin(\frac{\pi}{2} t)$$

und somit die Behauptung.

Der Beweis von (i) und (ii) schließlich folgt durch Variablentransformationen und aus den Bedingungen (1.4.2) und (1.4.3):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t g(b \sin(\frac{\pi}{2}(1-s))) \, ds = b \sin(\frac{\pi}{2} t) = \\
 & = \int_0^t g(b \sin(\frac{\pi}{2}(1-s))) = \frac{\pi}{2} b \sin(\frac{\pi}{2}(1-s)) \, ds = \\
 & = \int_{1-t}^1 g(b \sin(\frac{\pi}{2} s)) = \frac{\pi}{2} b \sin(\frac{\pi}{2} s) \, ds = \\
 & = \int_{\sin(\frac{\pi}{2}(1-t))}^1 \frac{2}{\pi} (g(bs) - \frac{\pi}{2} bs) \frac{d \arcsin(s)}{ds} \, ds = \\
 & = \frac{2}{\pi b} \int_{b \sin(\frac{\pi}{2}(t-1))}^b (g(s) - \frac{\pi}{2} s) \, \rho(s, b) \, ds \leq 0 \text{ nach (1.4.2)}.
 \end{aligned}$$

Vollkommen analog wird die Behauptung (ii) bewiesen.

Der Beweis von Satz (1.4) ist damit vollständig erbracht.

(1.7) Bemerkung

Ist die ungerade, stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selbst monoton wachsend, so ist R_f ein monotoner Operator, d.h., für $\xi, \phi \in X$ mit $\xi < \phi$ gilt auch $R_f \xi \leq R_f \phi$. Sind dann für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ die Bedingungen (1.4.2) und (1.4.3) mit $h = f = g$ erfüllt, so konvergieren die Picard - Iterierten $R_f^n(a \sin(\frac{\pi}{2} \cdot))$ und $R_f^n(b \sin(\frac{\pi}{2} \cdot))$, $n \in \mathbb{N}$, für $n \rightarrow \infty$ gegen einen (möglicherweise denselben) Fixpunkt von R_f .

(1.8) Korollar

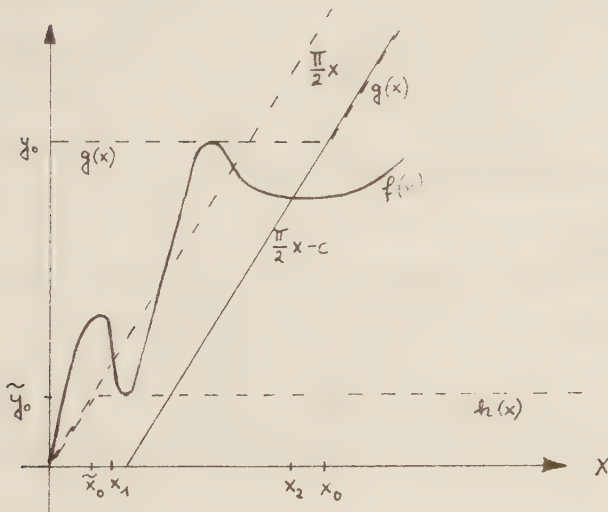
Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und stetig und erfülle $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$. Gibt es dann ein $x_1 > 0$ derart, daß $f(x) \geq \frac{\pi}{2} x$ für alle $x \in [0, x_1]$ gilt, und ein $x_2 > x_1$ derart, daß $f(x) \leq \frac{\pi}{2} x - c$ für alle $x \in [x_2, \infty)$ und ein $c > 0$ gilt, dann besitzt (I) $u'(t) = -f(u(t-1))$ eine nichttriviale periodische Lösung vom Typ (H_4) .

Beweis

Sei $y_0 := \max_{0 \leq x \leq x_2} f(x)$ und $x_0 := \frac{2}{\pi}(y_0 + c)$, dann gilt für $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} y_0 & \text{für } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\pi}{2} x - c & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

g ist monoton wachsend und erfüllt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.



Aus dem Graphen von g wird sofort klar, daß es ein $b \geq x_0$ gibt, so daß für alle $x \in [0, b]$ gilt:

$$\int_x^b g(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds \leq 0.$$

Wegen $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ folgt: $\tilde{y}_0 := \min_{x_0 < x < b} f(x) > 0$.

Definiere $\tilde{x}_0 := \frac{2}{\pi} \tilde{y}_0$ und $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} x & \text{für } 0 \leq x \leq \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 & \text{für } \tilde{x}_0 \leq x, \end{cases}$$

dann ist h eine monoton wachsende stetige Funktion, die für $0 \leq x \leq b$ der Ungleichung $h(x) \leq f(x)$ genügt. Außerdem ist für alle $x \in [0, \tilde{x}_0]$

$$\int_x^{\tilde{x}_0} h(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds \geq 0 \text{ erfüllt.}$$

Mit $a := \tilde{x}_0$ sind somit alle Voraussetzungen des Satzes (1.4) verifiziert.

Mit Hilfe des Korollars (1.8) folgt sofort:

(1.9) Korollar

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, ungerade und erfülle $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$. Außerdem mögen die folgenden Limites existieren:

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \text{wobei wir } \alpha = \infty \text{ zulassen}$$

wollen. Gilt dann $\alpha > \frac{\pi}{2} > \beta$, so besitzt (I) eine nichttriviale periodische Lösung.

(1.10) Bemerkung

Dieses Resultat wurde von Nussbaum in [30] und ohne die Einschränkung 'f ungerade' in [25] bewiesen, wobei dort definiert ist: $\beta := \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, in gewissem Sinne eine asymptotische Ungeradheitsbedingung. Kaplan und Yorke [19] konnten dieses Resultat unter der zusätzlichen Voraussetzung $\int_0^x f(s) ds \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ beweisen.

In allen drei Arbeiten wird allerdings gezeigt, daß das Existenzresultat auch dann richtig bleibt, wenn $\alpha < \frac{\pi}{2} < \beta$ gilt, wobei $\beta = \infty$ zugelassen wird. Wir wollen den Beweis hier nicht führen, er ergibt sich aber implizit aus den Ergebnissen von Kapitel III.

Im Beispiel (1.6) erwähnten wir, daß (I) für die Nichtlinearität $f(x) = \frac{\pi}{2} x + \sin(\frac{\pi}{2} x)$ neben den dort schon nachgewiesenen unendlich vielen periodischen Lösungen vom Typ (H_4) noch weitere besitzt, und zwar noch einmal unendlich viele. Das folgt aus dem folgenden Satz, in dem wir nur aus beweistechnischen Gründen die Nichtlinearität f als monoton wachsend voraussetzen; eine Verallgemeinerung analog zum Satz (1.4) ist durchaus möglich.

(1.11) Satz

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade, stetige und monoton wachsende Funktion. Für $z > 0$ und $0 \leq x < z$ definieren wir wie im Satz (1.4): $\varepsilon(x, z) := (1 - \frac{x^2}{z^2})^{-\frac{1}{2}}$.

Es gebe Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a < b < c < d$ derart, daß

$$(1.11.1) \quad \int_x^a (f(s) - \frac{\pi}{2} s) \rho(s, a) ds \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq a,$$

$$(1.11.2) \quad \int_x^b (f(s) - \frac{\pi}{2} s) \rho(s, b) ds < 0 \quad \text{für } 0 \leq x < b,$$

$$(1.11.3) \quad \int_x^c (f(s) - \frac{\pi}{2} s) \rho(s, c) ds > 0 \quad \text{für } 0 \leq x < c,$$

$$(1.11.4) \quad \int_x^d (f(s) - \frac{\pi}{2} s) \rho(s, d) ds \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq d.$$

Dann gibt es wegen Satz (1.4) zunächst einmal zwei periodische Lösungen u_1 und u_2 von (I) $u'(t) = -f(u(t-1))$ mit $c \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_1(t)| \leq d$ und $a \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_2(t)| \leq b$, wobei u_2 die triviale Lösung ($u_2 \equiv 0$) sein kann, wenn $a = 0$ gilt.

Zusätzlich zu diesen gibt es aber noch eine weitere nicht-triviale periodische Lösung u_3 von (I) vom Typ (H_4) , die von u_1 und u_2 verschieden ist, von der wir jedoch nur $a \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_3(t)| \leq d$ und $b \sin(\frac{\pi}{2} t_0) < u_3(t_0) < c \sin(\frac{\pi}{2} t_0)$ für ein $t_0 \in (0, 1]$ zeigen können.

Der Beweis dieses Satzes beruht im wesentlichen auf einem Resultat von H. Amann [2] und den Überlegungen aus dem Beweis von Satz (1.4). Wir erinnern zunächst an die folgende Definition:

(1.12) Definition

Eine nichtleere Teilmenge A eines topologischen Raumes Y heißt Retrakt von Y , wenn es eine stetige Abbildung $r: Y \rightarrow A$ (eine sogenannte Retraktion) gibt, die auf A die Identität id_A ist, d.h., für die $r(a) = a$ für alle $a \in A$ gilt.

(1.13) Lemma (vergl. [2], Lemma 14.1)

Es sei A ein Retrakt eines Banachraumes und $F: A \rightarrow A$ eine stetige und kompakte Abbildung. A_1 und A_2 seien disjunkte Retrakte von A . U_1 und U_2 seien offene Teilmengen von A , für die $U_k \subset A_k$, $k = 1, 2$, gilt. Des weiteren wollen wir für $k = 1, 2$ annehmen, daß $F(A_k) \subset A_k$ gilt und daß F keine Fixpunkte in $A_k \setminus U_k$ besitzt. Dann hat F wenigstens drei verschiedene Fixpunkte x, x_1, x_2 mit $x_k \in A_k$, $k = 1, 2$, und $x \in A \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Beweis von Satz (1.11)

Wir wollen Lemma (1.13) anwenden. Nach einem Satz von Dugundji [7] ist jede nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines Banachraumes E ein Retrakt von E .

Als Retrakt A des Banachraumes $X = \{\xi \in C[0,1] \mid \xi(0) = 0\}$ wählen wir:

$$A := \{\xi \in X \mid a \sin(\frac{\pi}{2}c) \leq \xi \leq d \sin(\frac{\pi}{2}c)\}.$$

Aus dem Beweis von Satz (1.4) folgt mit Bedingung (1.11.1) und (1.11.4) $R_f(A) \subset A$. Da $R_f: X \rightarrow X$ ein vollstetiger

Operator ist, folgt daraus, daß $R_f|_A$ ein kompakter und stetiger Operator von A in sich ist, den wir der Einfachheit halber im folgenden mit R_f bezeichnen wollen.

Mit Bedingung (1.11.1) und (1.11.2) folgt für jedes

$$\xi \in A'_1 := \{\xi \in A \mid \xi \leq b \sin(\frac{\pi}{2} \circ)\}:$$

$R_f \xi \in A'_1$, wobei das strikte "<" - Zeichen in (1.11.2)

$R_f \xi(t) < b \sin(\frac{\pi}{2} t)$ für alle $t \in (0, 1]$ impliziert.

A'_1 enthält aber keine in A offene Teilmenge. Da die obige Ungleichung aber strikt ist, ergibt sich leicht, daß wir ein $\varepsilon_1 > 0$ finden können, derart daß für alle

$$\xi \in A_1 := \{\xi \in A \mid \xi(t) \leq \max(\varepsilon_1, b \sin(\frac{\pi}{2} t)), 0 \leq t \leq 1\}$$

$R_f \xi \in A'_1 \subset A_1$ gilt. A_1 enthält nun aber die in A offene Teilmenge

$$U_1 := \{\xi \in A \mid \xi(t) < \max(\varepsilon_1, b \sin(\frac{\pi}{2} t)), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Daß R_f keinen Fixpunkt in $A_1 \setminus U_1$ hat, folgt leicht aus dem bisher gesagten.

Nun folgt aus den Bedingungen (1.11.3) und (1.11.4)

mit Hilfe des Beweises von Satz (1.4) für jedes

$$\xi \in A'_2 := \{\xi \in A \mid c \sin(\frac{\pi}{2} \circ) \leq \xi\}:$$

$$R_f \xi(t) > b \sin(\frac{\pi}{2} t) \text{ für alle } t \in (0, 1].$$

A'_2 enthält aber wiederum keine in A offene Teilmenge. Da die obige Ungleichung aber strikt ist, können wir ein

$\varepsilon_2 > 0$ finden, so daß für alle

$\xi \in A_2 := \{\xi \in A \mid \xi(t) \geq b \sin(\frac{\pi}{2} t) \text{ für alle } t \in [\varepsilon_2, 1]\}$

$R_f \xi \in A'_2 \subset A_2$ gilt.

A_2 enthält nun aber die in A offene Teilmenge

$U_2 := \{\xi \in A \mid \xi(t) > b \sin(\frac{\pi}{2} t) \text{ für alle } t \in [\varepsilon_2, 1]\}$,

und R_f enthält keinen Fixpunkt in $A_2 \setminus U_2$.

Mit den so definierten Mengen A , A_1 , A_2 , U_1 , U_2 und der Abbildung $R_f: A \rightarrow A$ sind alle Voraussetzungen vom Lemma (1.13) erfüllt. Also hat R_f einen Fixpunkt in $A \setminus (A_1 \cup A_2)$, und damit folgt leicht die Behauptung von Satz (1.11).

Auf die Anwendung des Satzes (1.11) auf das Beispiel (1.6) kommen wir im nächsten Paragraphen (Beispiel (2.6)) noch zurück.

(1.14) Bemerkung

Das bemerkenswerteste an den Sätzen (1.4) und (1.11) ist eigentlich, daß mit diesen Resultaten einfache Multiplizitätskriterien geliefert werden (vergl. Beispiel (1.6)). Solche Multiplizitäten für periodische Lösungen von (I) können aber als harmlos und wohlverstanden angesehen werden, da all diese periodischen Lösungen die gleiche Struktur aufweisen. Sie sind alle vom Typ (H_4) und gehören,

wenn die Nichtlinearität f die Bedingung $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ erfüllt, alle zu einem parametrisierbaren Kontinuum periodischer Lösungen der parameterabhängigen Gleichung $u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$, wie wir im nächsten Paragraphen noch sehen werden.

Weitaus komplexer ist das Auftreten strukturell verschiedenartiger periodischer Lösungen von (I), was von Nussbaum [27] für spezielle stetige und von Peters [37] für bestimmte stückweise konstante Nichtlinearitäten nachgewiesen werden konnte. Wir werden uns im §3 noch eingehender mit diesem Phänomen beschäftigen.

Neben solchen Multiplizitätsresultaten gibt es von R. Nussbaum auch Eindeutigkeitsresultate (siehe dazu die Theoreme (1.5) und (2.2) in [27]).

§ 2 Kontinua periodischer Lösungen der parameterabhängigen Gleichung $u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$

Wir wollen hier das Periodizitätsproblem für die parameterabhängige Gleichung

$$(I_\lambda) \quad u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$$

mit Parameter $\lambda > 0$ untersuchen, wobei wir an f die folgenden Voraussetzungen stellen:

(B) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ungerade und stetig und erfüllt
 $f(x)x > 0$ für alle $x \neq 0$.

Unser Interesse gilt der Struktur der Familien (u_λ, λ) für positive reelle λ derart, daß $u_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichttriviale periodische Lösung von (I_λ) vom Typ (H_4) ist, oder, äquivalent dazu, der Struktur der Familien $(\xi_\lambda, \lambda) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, derart daß ξ_λ ein nichttrivialer Fixpunkt von $R_{\lambda f}$ im Kegel K der nichtnegativen stetigen Funktionen aus $X = \{\xi \in C[0,1] \mid \xi(0) = 0\}$ ist.

In [26] konnte R. Nussbaum mit Hilfe eines Satzes über globale Verzweigung für eine Klasse nicht notwendig ungerader Nichtlinearitäten f zeigen, daß die Bedingung $f'(0) > 0$ die Existenz eines unbeschränkten Kontinuums periodischer Lösungen von (I_λ) impliziert, welches für $\lambda = \frac{\pi}{2f'(0)}$ von der Nulllösung verzweigt.

In [3] zeigte der Autor, daß, wenn f der Bedingung (B) genügt und zusätzlich differenzierbar ist in Null mit $f'(0) > 0$, der Operator

$$\begin{aligned} T: K \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow K \\ (\xi, \lambda) &\longmapsto R_{\lambda f} \xi \end{aligned}$$

alle Voraussetzungen des globalen Verzweigungssatzes von R. Nussbaum (Theorem 1.1 in [26]) erfüllt, woraus sofort das folgende Ergebnis folgt:

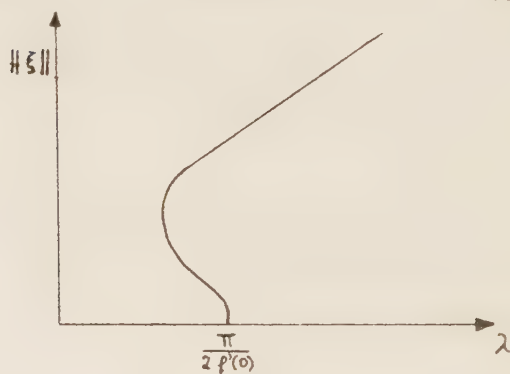
(2.1) Satz

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzung (B), sei zusätzlich in 0 differenzierbar und erfülle dort $f'(0) > 0$. Versehen wir die Menge $K \times \mathbb{R}^+$ mit der Metrik: $d((\xi_1, \lambda_1), (\xi_2, \lambda_2)) := \|\xi_1 - \xi_2\| + |\lambda_1 - \lambda_2|$ für $(\xi_1, \lambda_1), (\xi_2, \lambda_2) \in K \times \mathbb{R}^+$, dann gibt es ein unbeschränktes Kontinuum, d.h. eine abgeschlossene und zusammenhängende Menge $S_f \subset K \times \mathbb{R}^+$, so daß

$$(i) \quad T(\xi, \lambda) = \xi \quad \text{für alle } (\xi, \lambda) \in S_f$$

und

$$(ii) \quad (0, \lambda) \in S_f \text{ genau dann, wenn } \lambda = \frac{\pi}{2f'(0)}.$$



Zwar konnte nachgewiesen werden, daß ein solches Kontinuum wie im obigen Bild angedeutet rückläufig sein kann (siehe H.O. Walther [41] und N. Angelstorf [3]), aber ansonsten kann man aus Satz (2.1) keine Aussagen über die Struktur des Kontinuums S_f gewinnen.

Es ist also offen,

- ob das Kontinuum S_f parametrisierbar ist,
- wie sein asymptotisches Verhalten ist,
- ob alle nichttrivialen Lösungen des nichtlinearen Eigenwertproblems $T(\xi, \lambda) = \xi$ mit $\xi \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ auch tatsächlich zu S_f gehören.

Außerdem ist ungeklärt, was mit diesem Kontinuum geschieht, wenn f nicht mehr differenzierbar ist in o .

Wir beweisen hier als positives Resultat:

(2.2) Satz

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzung (B), dann gilt:

- (a) Es gibt eine stetige Abbildung

$P: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow K \times \mathbb{R}^+$, derart daß

$P(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) = \{(\xi, \lambda) \in K \times \mathbb{R}^+ \mid \xi \neq 0 \text{ und } T(\xi, \lambda) = \xi\}$

und mit der Eigenschaft, daß für alle $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

mit $P(r) = (\xi_r, \lambda_r)$ gilt: $\|\xi_r\| = r$.

Die nichttrivialen Lösungen aus $K \times \mathbb{R}^+$ des nichtlinearen Eigenwertproblems $T(\xi, \lambda) = \xi$ bilden also eine über $\|\cdot\|$ parametrisierbare Kurve.

(b) Ist f in o differenzierbar mit $f'(o) = \alpha > 0$ (oder gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \infty$), so ist P in o stetig ergänzbar durch: $P(o) := (o, \frac{\pi}{2\alpha})$ (bzw. durch $P(o) := (o, o)$).

Falls hingegen $f'(o) = 0$ gilt, so erhalten wir

$\lambda_r \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow o$, wobei λ_r die zweite Komponente von $P(r) = (\xi_r, \lambda_r)$ bezeichne.

(c) Existiert der folgende Limes:

$$\beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

und gilt zusätzlich, falls $\beta = 0$,

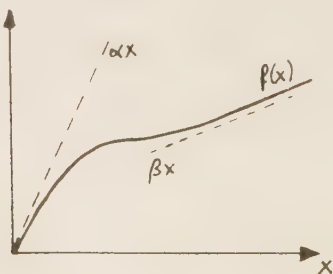
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(s) ds = \infty \quad \text{oder} \quad f(x) \leq k \quad \text{für ein } k > 0$$

und alle $x \geq 0$, so erhalten wir:

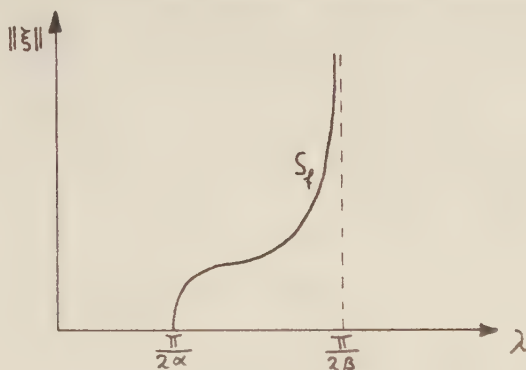
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_r = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = \infty, \\ \frac{\pi}{2\beta}, & \text{falls } \beta \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } \beta = 0, \end{cases}$$

wobei λ_r wiederum die zweite Komponente von $P(r)$, $r > 0$, bezeichne.

Zur Illustration: Für eine ungerade Nichtlinearität f , deren Graph für $x \geq 0$ etwa die folgenden Charakteristika hat:



erhalten wir qualitativ etwa folgendes Verzweigungsdiagramm:



Der Beweis des Satzes beruht im wesentlichen auf der schon in § 1 erwähnten Arbeit von Kaplan und Yorke [19] und der folgenden leichten Verallgemeinerung von Nussbaum [27]:

(2.3) Lemma (vergl. Theorem 1.2 in [27])

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzung (B).

(a) Dann gibt es für alle $r > 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{w}' = -f(y)$$

$$(\ast) \quad y' = f(w)$$

$$w(0) = 0, \quad y(0) = -r.$$

Diese ist periodisch mit der von r stetig abhängigen Periode $q(r)$, und es gilt:

$$w(-t) = -w(t), \quad w\left(t + \frac{q(r)}{2}\right) = -w(t) \text{ und}$$

$$y(t) = w\left(t - \frac{q(r)}{4}\right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ sowie } w(t) > 0 \text{ für } t \in \left(0, \frac{q(r)}{2}\right).$$

(b) Existiert $\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, so gilt:

$$\lim_{r \rightarrow 0} q(r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha = \infty, \\ \frac{2\pi}{\alpha}, & \text{falls } \alpha \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases}$$

(c) Existiert $\beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ und gilt, falls $\beta = 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(s) ds = \infty \quad \text{oder} \quad f(x) < k \quad \text{für ein } k > 0$$

und alle $x \geq 0$, dann erhalten wir:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q(r) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = \infty, \\ \frac{2\pi}{\beta}, & \text{falls } \beta \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } \beta = 0. \end{cases}$$

Die entscheidende Idee für den Beweis dieses Lemmas ist die, daß alle Lösungen des Anfangswertproblems (*) auf den Niveaulinien des Funktionals $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$V(x, y) = \int_0^x f(s) ds + \int_0^y f(s) ds \quad \text{verlaufen und daß}$$

diese Niveaulinien einfach geschlossene Kurven im $\mathbb{R}^2$ sind, welche durch hohe Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet sind. Wir wollen hier aber nicht näher auf den Beweis eingehen.

Der Satz (2.2) ist nun nur noch eine leichte Folgerung aus dem Lemma (2.3). Ist nämlich für ein $r > 0$ die periodische Lösung des Anfangswertproblems (-) (w, y) mit Periode $q(r)$ gegeben, so gilt $y(t) = w(t - \frac{q(r)}{4})$, $t \in \mathbb{R}$, also ist

w eine periodische Lösung der zeitverzögerten Differentialgleichung $w'(t) = -f(w(t - \frac{q(r)}{4}))$. Definieren wir dann $\lambda_r := \frac{q(r)}{4}$ und $u(t) := w(\lambda_r t)$, $t \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$u'(t) = \lambda_r w'(\lambda_r t) = -\lambda_r f(w(\lambda_r(t-1))) = -\lambda_r f(u(t-1))$$

und $\max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| = u(1) = r$. u ist dann eine periodische

Lösung von (I_{λ_r}) vom Typ (H_4) .

Ist umgekehrt für ein $\lambda > 0$ eine periodische Lösung u von (I_λ) vom Typ (H_4) gegeben, so wird durch $w(t) := u(\frac{1}{\lambda}t)$ und $y(t) := w(t-\lambda)$, $t \in \mathbb{R}$, eine periodische Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ mit $r = u(1)$ definiert. Aufgrund dieser eindeutigen Beziehung zwischen den nichttrivialen Lösungen des Anfangswertproblems $(*)$ und den periodischen Lösungen vom Typ (H_4) der parameterabhängigen Gleichung (I_λ) sind die Behauptungen vom Satz (2.2) einfache Folgerungen aus dem Lemma (2.3) sowie Satz (1.1).

(2.4) Bemerkung

Die Periode $q(r)$ einer Lösung (w,y) des Anfangswertproblems $(*)$ ist für jedes $r > 0$ implizit gegeben durch die Gleichung (vergl. [19]):

$$2\pi = \int_0^r \frac{q(r) \frac{wy' - yw'}{w^2 + y^2}}{dt} dt = \int_0^r \frac{q(r) \frac{wf(w) + yf(y)}{w^2 + y^2}}{dt} dt.$$

Nehmen wir nun an, daß f in o nicht differenzierbar ist, aber in einem Intervall $[o, b]$, $b > o$, einer Ungleichung der Form

$$c_1 x \leq f(x) \leq c_2 x$$

mit $0 \leq c_1 < c_2$ genügt, so gilt für jede Lösung (w, y) von $(*)$ für ein $r \in (o, b]$:

$$c_1 \leq \frac{wf(w) + yf(y)}{w^2 + y^2} \leq c_2,$$

also $c_1 q(r) \leq 2\pi \leq c_2 q(r)$, und somit

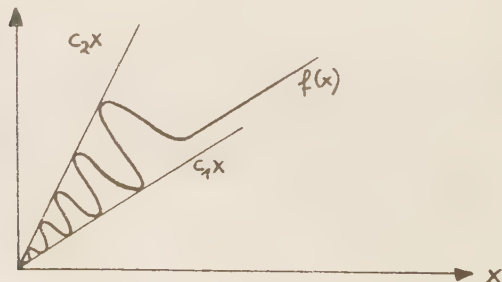
$$\frac{2\pi}{c_2} \leq q(r) \leq \frac{2\pi}{c_1}.$$

Daraus folgt für alle nichttrivialen Lösungen von

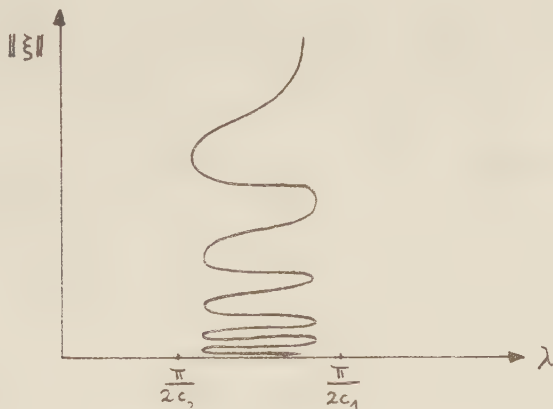
$T(\xi, \lambda) = \xi$, $\xi \in K$, $\lambda > o$, mit $|\xi| < b$:

$$\frac{\pi}{2c_2} < \lambda < \frac{\pi}{2c_1}.$$

Wenn wir also eine in o nicht differenzierbare Nichtlinearität f (f ungerade) mit etwa folgendem Graphen für $x > o$ haben,



so können wir mit dem folgenden qualitativen Verhalten des Kontinuums der Lösungen von $T(\xi, \lambda) = \xi$, $\xi \in K$, $\lambda > 0$, rechnen:



Wir wollen zum Abschluß dieses Paragraphen zwei Beispiele für globales qualitatives Verzweigungsverhalten diskutieren. Dazu brauchen wir noch das folgende Lemma:

(2.5) Lemma

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade, stetig und monoton wachsend.

(a) Gibt es dann ein $c_1 > 0$, so daß gilt:

$$(2.5.1) \quad f(x) < \frac{\pi}{2} x \quad \text{für alle } x \geq c_1,$$

$$(2.5.2) \quad \int_0^{c_1} f(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds < 0 \quad \text{für alle } x \in [0, c_1],$$

dann gilt für jeden Fixpunkt $\xi \in K$ von R_f : $\|\xi\| < c_1$.

(b) Gibt es ein $c_2 > 0$, so daß gilt:

$$(2.5.3) \quad f(x) > \frac{\pi}{2} x \quad \text{für alle } x \geq c_2,$$

$$(2.5.4) \quad \int_x^{c_2} f(s) - \frac{\pi}{2} s \, ds > 0 \quad \text{für alle } x \in [0, c_2),$$

dann gilt für alle Fixpunkte $\xi \in K$ von R_f : $\|\xi\| < \frac{\pi}{2} c_2$.

Beweis

(a) Angenommen, es gibt einen Fixpunkt $\xi \in K$ von R_f mit

$\|\xi\| \geq c_1$. Definiere $\varepsilon_0 := \inf\{\varepsilon > \|\xi\| \mid \varepsilon \sin(\frac{\pi}{2}\varepsilon) \geq \xi\}$
und $\xi_0 := \varepsilon_0 \sin(\frac{\pi}{2}\varepsilon_0)$.

Natürlich gilt dann

$$(i) \quad \xi \leq \xi_0,$$

aber aus (2.5.1) folgt leicht, daß es ein $t_0 \in (0, 1]$ geben muß, so daß gilt:

$$(ii) \quad \xi(t_0) = \xi_0(t_0).$$

Aufgrund der Bedingungen (2.5.1) und (2.5.2) können wir aber darauf schließen, daß $R_f \xi_0(t) < \xi_0(t)$ für alle $t \in (0, 1^-)$, also insbesondere für $t = t_0$ gilt. Da mit f auch R_f monoton ist, folgt dann mit (i) und (ii)

$$\xi(t_0) = R_f \xi(t_0) \leq R_f \xi_0(t_0) < \xi_0(t_0) = \xi(t_0),$$

also ein Widerspruch.

(b) Angenommen, es gibt einen Fixpunkt $\xi \in K$ von R_f mit

$$\|\xi\| \geq \frac{\pi}{2} c_2. \text{ Dann ist } \xi \text{ monoton wachsend; und da}$$

$\xi'(t) = f(\xi(1-t))$, folgt aus der Monotonie von f , daß

ξ' monoton fallend sein muß. Da nun $\|\xi\| = \xi(1) \geq \frac{\pi}{2} c_2$,

folgt:

$$\xi(t) \geq \frac{\pi}{2} c_2 t \geq c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Deshalb gilt:

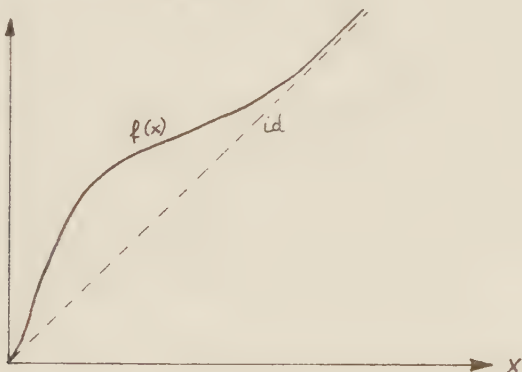
$$c_2 \leq \varepsilon_0 := \sup\{\varepsilon < \|\xi\| \mid \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right) \leq \xi\}.$$

Die weitere Argumentation für den Beweis von (b) wird analog zum Beweis von (a) geführt.

(2.6) Beispiel

Es sei

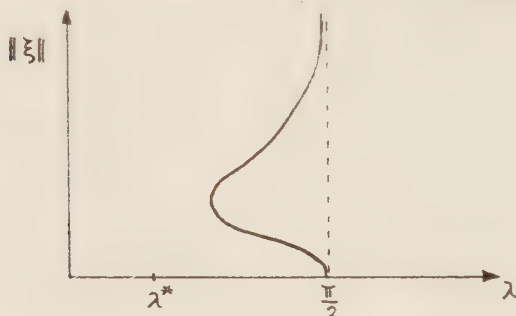
$$(2.6.1) \quad f(x) := x + \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$



Wir wollen das Kontinuum S_f der nichttrivialen Lösungen aus $K \times \mathbb{R}^+$ von $T(\xi, \lambda) = \xi$ diskutieren. Es gilt $f'(0) = 1$, deshalb verzweigt das Kontinuum von der Nulllösung für $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Da aber auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ist, findet die "Verzweigung im Unendlichen" ebenfalls für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ statt. Für $\lambda \geq \frac{\pi}{2}$ kann es aufgrund von Lemma (2.5, b) keine nichttriviale Lösung von $T(\xi, \lambda) = \xi$, $\xi \in K$, geben. Für $\lambda < \frac{\pi}{2}$ lassen sich hingegen, wenn λ nahe genug bei $\frac{\pi}{2}$ liegt, die Voraussetzungen von Satz (1.4) und Satz (1.11) verifizieren.

Wir erhalten dann zumindest zwei nichttriviale Lösungen von $T(\xi, \lambda) = \xi$. Ab einem bestimmten $\lambda^* < \frac{\pi}{2}$ gilt aber $\lambda f(x) < \frac{\pi}{2} x$ für alle $x > 0$ und $\lambda < \lambda^*$, so daß für $\lambda < \lambda^*$ wegen Lemma (2.5,a) keine nichttriviale Lösung von $T(\xi, \lambda) = \xi$ mehr existieren kann.

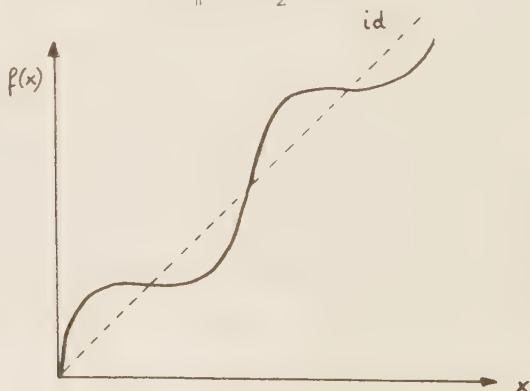
Deshalb sollte das folgende Diagramm die qualitativen Merkmale des Kontinuums $\mathcal{C}_f$ richtig wiedergeben:



Tatsächlich wurde ein solches Verhalten mit numerischen Studien von H.-O. Peitgen und M. Prüfer [33] belegt.

Als weiteres Beispiel wollen wir diskutieren (vergl. Beispiel (1.6)):

$$(2.6.2) \quad f(x) = x + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$



f ist wegen $f' \geq 0$ monoton wachsend. Es gilt $f'(0) = 2$; das Kontinuum S_f der nichttrivialen Lösungen $(\xi, \lambda) \in K \times \mathbb{R}^+$ von $T(\xi, \lambda) = \xi$ verzweigt also für $\lambda = \frac{\pi}{4}$ von der Nulllösung. Außerdem haben wir $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; das Kontinuum verzweigt also für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ "aus dem Unendlichen".

Für $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 4n-2]$ erhalten wir (vergl. Beispiel (1.6)):

$$\begin{aligned} \int_x^{4n-2} \frac{\pi}{2} (f(s) - s) \, ds &= \int_x^{4n-2} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \, ds = \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - \cos(\frac{\pi}{2} x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, daß damit

$$\int_x^{4n-2} \frac{\pi}{2} (f(s) - s) \, \rho(s, 4n-2) \, ds > 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 4n-2)$$

folgt, da $\rho(s, 4n-2)$ für $0 \leq s < 4n-2$ eine in s streng monoton wachsende Funktion ist (vergl. Satz (1.4)).

Entsprechend erhalten wir natürlich für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_x^{4n} \frac{\pi}{2} (f(s) - s) \, \rho(s, 4n) \, ds < 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 4n).$$

Mit Satz (1.4) folgt daraus zunächst für alle $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $\xi_n \in K$ mit $T(\xi_n, \frac{\pi}{2}) = \xi_n$ und

$$4n-2 \leq \|\xi_n\| \leq 4n.$$

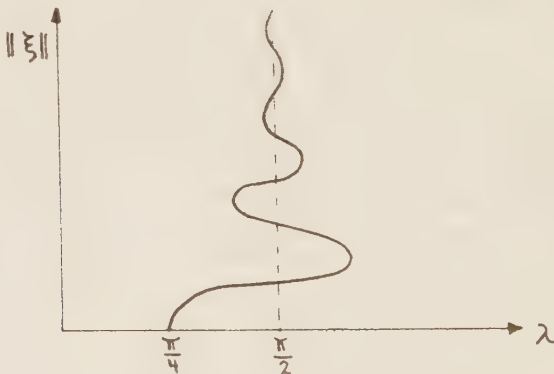
Zusätzlich zu diesen erhalten wir mit Satz (1.11) für alle $n \in \mathbb{N}$ von den ξ_n verschiedene Lösungen $\phi_n \in K$, die auch

untereinander paarweise verschieden sind und

$$4n-2 \leq \|\phi_n\| \leq 4n+4 \text{ erfüllen.}$$

Für festes $\lambda \neq \frac{\pi}{2}$ können wir mit Lemma (2.5) schließen, daß die Menge der Lösungen von $T(\xi, \lambda) = \xi$, $\xi \in K$ beschränkt sein muß. Andererseits kann man aber, falls $|\lambda - \frac{\pi}{2}|$ klein ist, mit Satz (1.4) und (1.11) die Existenz zumindest endlich vieler Lösungen nachweisen, wobei die Anzahl mit $|\lambda - \frac{\pi}{2}|$ gegen unendlich wächst.

Deshalb sollte das folgende Diagramm die qualitativen Merkmale des verzweigenden Kontinuums S_f richtig wiedergeben:



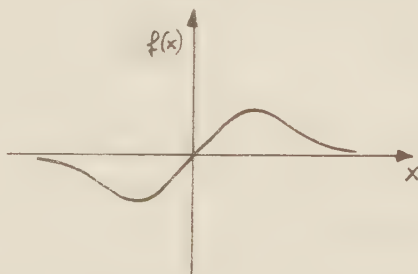
Durch numerische Studien von H.-O. Peitgen und M. Prüfer [33] konnte ein solches Verhalten für ähnliche Beispiele tatsächlich beobachtet werden.

§ 3 Strukturell andersartige periodische Lösungen von $u'(t) = -f(u(t-1))$

Die Ergebnisse der Paragraphen 1 und 2 könnten den Eindruck erwecken, als sei das Periodizitätsproblem für die zeitverzögerte Differentialgleichung (I) und ebenso für die parameterabhängige Gleichung (I_λ) wohlverstanden, beschränkt man sich nur auf ungerade Nichtlinearitäten f , die etwa noch die Bedingung $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ erfüllen.

Um so überraschender muß die Vermutung von R. Nussbaum [31] sein, das Periodizitätsproblem für die Gleichung (I_λ) $u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$ mit der Nichtlinearität

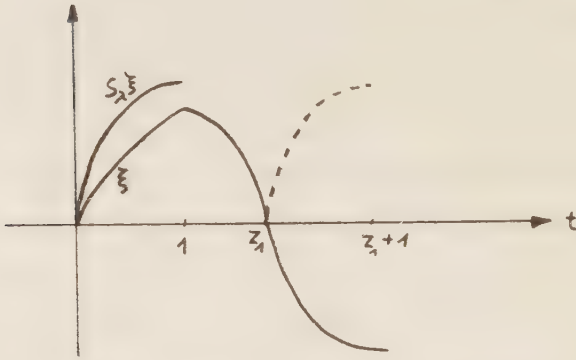
$$f(x) = \frac{x}{1+x^8}$$



verhalte sich "chaotisch". Was dabei unter "chaotisch" verstanden werden soll, wollen wir hier kurz präzisieren. Es bezeichne $\tilde{K}$ den Kegel aller monoton wachsenden Funktionen aus dem Banachraum $X = \{ \xi \in C[0,1] \mid \xi(0) = 0 \}$ und es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade stetige Funktion, die $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$ erfüllt. Für jedes $\lambda > 0$ und $\xi \in \tilde{K}$ sei $u = u(\xi, \lambda): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte stetige Funktion, für die $u|_{[0,1]} = \xi$ gilt, die für

$t \in [1, \infty)$ differenzierbar ist und dort der Gleichung (I_λ) genügt. Wir definieren dann wie folgt einen vollstetigen Operator $S_\lambda: \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$:

$$S_\lambda \xi(t) := \begin{cases} -u(z_1+t), & \text{falls } 1 \leq z_1 < \infty \text{ die erste Nullstelle} \\ & \text{von } u \text{ ist.} \\ 0, & \text{falls } u \text{ keine Nullstelle } z_1 \geq 1 \text{ besitzt.} \end{cases}$$



Daß der so definierte Operator S_λ tatsächlich ein vollstetiger Operator von $\tilde{K}$ in sich ist, ergibt sich z.B. aus den Resultaten von R. Nussbaum in [25].

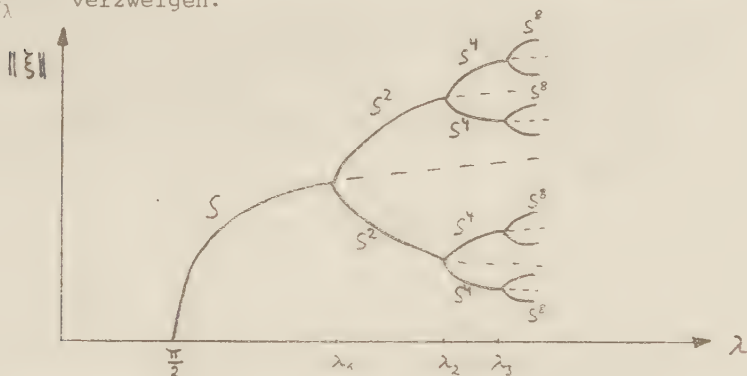
Da f als ungerade vorausgesetzt ist, kann jeder Fixpunkt $\xi \in \tilde{K} \setminus \{0\}$ von S_λ oder einer Iterierten S_λ^n von S_λ mit einer langsam-schwingenden periodischen Lösung von (I_λ) identifiziert werden.

Die Nussbaum'sche Vermutung für das Periodizitätsproblem für die Gleichung (I_λ) mit der Nichtlinearität

$$f(x) = \frac{x}{1+x^8} \quad \text{kann jetzt wie folgt formuliert werden:}$$

(3.1) Vermutung (Nussbaum [31])

Es gibt eine monoton wachsende Folge (λ_n) von Parametern, wo Fixpunkte von $S_\lambda^{2^n}$ (die nicht Fixpunkte von kleineren Iterierten von S_λ sind) instabil werden und Fixpunkte von $S_\lambda^{2^{n+1}}$ verzweigen.



Diese Folge konvergiert gegen einen Grenzwert λ^* , und für $\lambda > \lambda^*$ treten nach und nach noch Fixpunkte von Iterierten S_λ^k für solche natürlichen Zahlen k auf, die keine Potenz von 2 sind, bis schließlich für ein $\bar{\lambda}$ und für alle $\lambda > \bar{\lambda}$ Fixpunkte für jede Iterierte von S_λ existieren (die jeweils nicht Fixpunkte von kleineren Iterierten von S_λ sind).

Veranlaßt zu dieser Vermutung wurde R. Nussbaum wohl einerseits durch numerische Studien (vergl. [27], Remark 2.3), aber andererseits auch durch gewisse Analogien zu "chaotischem" Verhalten bei eindimensionalen Differenzengleichungen (vergl. Li und Yorke [23]).

Untermauert wurde diese Vermutung durch die weitgehenden numerischen Experimente von Jürgens - Peitgen - Saupe [18].

und durch die Ergebnisse von H. Peters [37], [38], der das Verhalten der Nichtlinearität $f(x) = \frac{x}{1+x^8}$ grob durch ein Treppenfunktionsmodell simulierte und für dieses Modell die Vermutung voll bestätigen konnte.

Von R. Nussbaum stammt das folgende, bisher einzige theoretische Resultat für eine stetige Modellnichtlinearität. Er konnte zeigen (vergl. [27], Theorem 3.1), daß (I_λ) mit der durch

$$f(x) := \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(x) |x|^{-r} & |x| > 1 \end{cases} ; r > 2$$

definierten Funktion für genügend großes λ neben der eindeutig bestimmten nichttrivialen periodischen Lösung vom Typ (H_4) solche langsamschwingenden periodischen Lösungen mit geringerer Symmetrie hat (S_λ - Fixpunkte), deren Periode größer als 4 ist und mit $\lambda \rightarrow \infty$ gegen unendlich strebt.

Das Ziel dieses Paragraphen ist es nun, zu zeigen, daß die von H. Peters [37] für ein Treppenfunktionsmodell nachgewiesenen langsamschwingenden periodischen Lösungen von (I) mit einer Periode, die echt kleiner als 4 ist, auch für geeignete stetige Modelle existieren. Wir tun dies in dem folgenden Satz für die fest vorgegebene Periode $p = 3$, ein analoges Resultat ist aber durchaus für jedes p mit $2 < p < 4$ zu beweisen.

(3.2) Satz

Es sei $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, eine stetige Schar ungerader stetiger Funktionen, die den folgenden Bedingungen genügen möge:

(3.2.1) Es gibt ein $k < 2$, so daß für alle $\lambda \geq 1$ und

$$\text{alle } x \geq \frac{1}{2} \text{ gilt: } k \geq f_\lambda(x) \geq 1.$$

(3.2.2) Für $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2$ gilt:

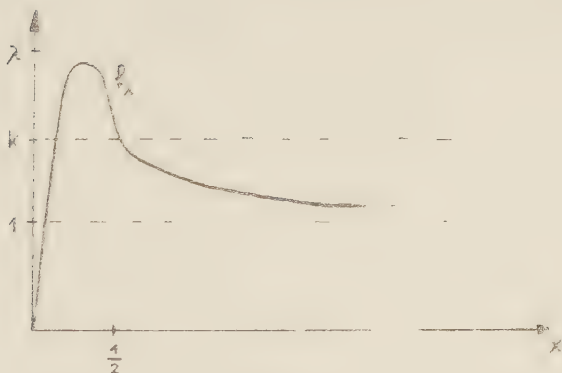
$$0 \leq f_{\lambda_1}(x) \leq f_{\lambda_2}(x) \text{ für alle } x \in (0, \frac{k}{2}).$$

(3.2.3) Für alle $\lambda \geq 1$ gilt:

$$f_\lambda(x) \geq 0 \text{ für alle } x \geq 0.$$

(3.2.4) Es gibt ein $c > \frac{k}{2}$, so daß für alle $\lambda \geq 1$ gilt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(x) dx \geq c\lambda. \quad (\text{wegen (3.2.3) folgt daraus } c < \frac{1}{2})$$



Dann gibt es ein $\lambda \geq 1$, für das die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(A.) \quad u'(t) = -f_\lambda(u(t-1))$$

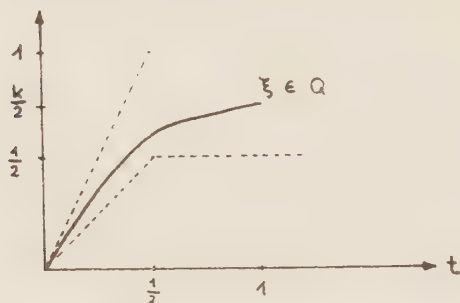
eine periodische Lösung $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, die genau die Periode 3 hat und für die gilt:

$$u(t) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad u(t + \frac{3}{2}) = -u(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis

Es bezeichne $Q \subset C[0,1]$ den Abschluß der konvexen Menge

$$\tilde{Q} := \{ \xi \in C[0,1] \mid \xi \text{ ist } C^1; \xi' \geq 0 \text{ und } 1 \leq \xi'(t) \leq k, t \in [0, \frac{1}{2}] \}.$$



Für jedes $\xi \in \tilde{Q}$ und für alle $\lambda \geq 1$ gilt wegen (3.2.4):

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(\xi(t)) \, dt = \int_0^{\xi(\frac{1}{2})} f_\lambda(x) \underbrace{(\xi^{-1})'(x)}_{\geq \frac{1}{k}} \, dx$$

$$\geq \frac{1}{k} \int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(x) \, dx \geq \frac{c}{k} \lambda \geq \frac{1}{4} \lambda.$$

Daraus folgt für alle $\xi \in Q$ und für alle $\lambda \geq 1$:

$$(3.2.5) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(\xi(t)) \, dt \geq \frac{c}{k} \lambda \geq \frac{1}{4} \lambda.$$

Wir wollen nun eine Selbstabbildung $\tilde{S}: Q \rightarrow Q$ definieren, deren Fixpunkte uns für geeignete λ periodische Lösungen liefern, die die Behauptung unseres Satzes erfüllen.

Ehe wir damit beginnen, wollen wir die folgende Notation festlegen:

Für $\xi \in Q$ und $\lambda \geq 1$ bezeichne $u(\xi, \lambda): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion, für die $u(\xi, \lambda)|_{[0,1]} = \xi$ gilt und die für $t \geq 1$ differenzierbar ist und dort der Gleichung (A_λ) genügt.

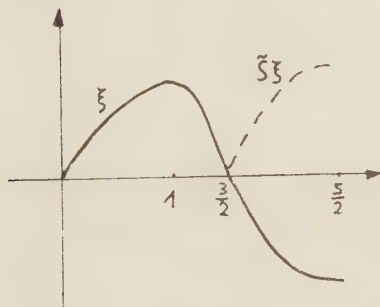
Wir werden diese Schreibweise im folgenden ohne besonderen Hinweis benutzen.

Sei nun $\xi \in Q$, so gilt $\xi(1) \geq \frac{1}{2}$. Deshalb gibt es wegen (3.2.2), (3.2.3) und (3.2.5) genau ein (von ξ stetig abhängiges) $\lambda_\xi > 1$ mit

$$(*) \quad \xi(1) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{\lambda_\xi}(\xi(t)) \, dt.$$

Wegen (*) gilt $u(\xi, \lambda_\xi)(\frac{3}{2}) = 0$. Wir definieren nun für $0 \leq t \leq 1$:

$$\tilde{S}\xi(t) := -u(\xi, \lambda_\xi)(\frac{3}{2} + t).$$



Wir haben dadurch eine monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktion $\tilde{S}_\xi \in C[0,1]$ definiert, und für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_\xi)'(t) &= -u'(\xi, \lambda_\xi) \left(\frac{3}{2} + t \right) = f_{\lambda_\xi}(u(\xi, \lambda_\xi) \left(\frac{1}{2} + t \right)) = \\ &= f_{\lambda_\xi}(\xi \left(\frac{1}{2} + t \right)). \end{aligned}$$

Da $\xi \in Q$, also $\xi(t) \geq \frac{1}{2}$ für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ gilt, folgt daraus mit (3.2.1) für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$:

$$1 \leq (\tilde{S}_\xi)'(t) \leq k,$$

also gilt: $\tilde{S}_\xi \in Q$.

Nun ist die Lösung $u(\xi, \lambda)$ von (A_λ) auf beschränkten Intervallen stetig abhängig von den Vorgaben $\xi \in Q$ und $\lambda \geq 1$. Daraus folgt leicht die Stetigkeit des Operators $\tilde{S}: Q \rightarrow Q$.

Daß $\tilde{S}$ beschränkte Teilmengen von Q in kompakte Teilmengen von Q überführt und $\tilde{S}$ damit ein vollstetiger Operator ist, sieht man wie folgt:

Sei $U \subset Q$ beschränkt und $\delta := \sup_{\xi \in U} \xi(1)$. Aus der Definition von $\tilde{S}$ sowie aus (3.2.5) und (3.2.3) folgt dann für alle $\xi \in U$ und alle $t \in [0,1]$:

$$0 \leq (\tilde{S}_\xi)'(t) \leq 4\delta.$$

Damit ist $\tilde{S}(U)$ eine gleichgradig stetige Teilmenge der in $C[0,1]$ abgeschlossenen Menge Q . Die Behauptung folgt damit aus dem Satz von Arzela - Ascoli.

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, daß $\tilde{S}$ einen Fixpunkt in Q besitzt, was, wie man sich leicht überlegt, äquivalent zur Behauptung des Satzes ist.

Dazu werden wir zeigen, daß $\tilde{S}$ die abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge

$$B := \{ \xi \in Q \mid \xi(1) \leq \frac{4kc}{4c-k} \}$$

invariant läßt. Mit dem Schauder'schen Fixpunktsatz folgt dann die Behauptung.

Sei also $\xi \in B$ und bezeichne $\lambda_\xi \geq 1$ wieder die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt:

$$\int_0^1 f_{\lambda_\xi}(\xi(t)) dt = \xi(1) .$$

Wegen (3.2.5) gilt dann:

$$(**) \quad \lambda_\xi \leq \frac{k}{c} \xi(1) .$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

$$(a) \quad \xi(1) \leq \frac{2c}{4c-k}$$

Aus der Definition von $\tilde{S}$ wissen wir

$$1 \cdot (\tilde{S}\xi)'(t) \leq k \quad \text{für } 0 < t < 1$$

und wegen (3.2.3)

$$0 \leq (\tilde{S}\xi)'(t) \leq \lambda_\xi \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 .$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{S}\xi(1) &\leq \frac{1}{2} k + \frac{1}{2} \lambda_\xi \leq \frac{1}{2} k + \frac{k}{2c} \xi(1) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} k + \frac{k}{2c} \frac{2c}{4c-k} = \frac{\frac{k}{2} (4c-k) + k}{4c-k} \end{aligned}$$

$$= \frac{2ck + k(1 - \frac{k}{2})}{4c - k} < \frac{4ck}{4c - k},$$

also $\tilde{S}\xi \in B$. Dabei folgt die letzte Ungleichung, da wegen (3.2.4) $c > \frac{k}{4} \geq \frac{1}{4}$ und deshalb $k(1 - \frac{k}{2}) < 2kc$ gilt.

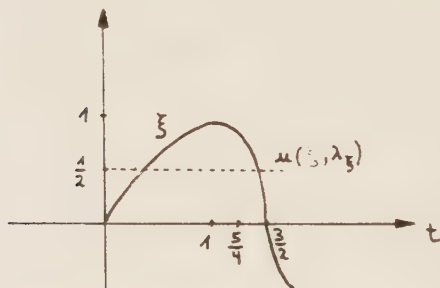
$$(b) \quad \xi(1) > \frac{2c}{4c - k}$$

Nehmen wir an, wir hätten schon gezeigt:

$$\xi(1) - \int_0^{\frac{1}{4}} f_{\lambda_\xi}(\xi(t)) dt \geq \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt:

$$u(\xi, \lambda_\xi)(t) \geq \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{5}{4}.$$



Wegen der Definition von $\tilde{S}$ muß dann gelten:

$$1 < (\tilde{S}\xi)'(t) \leq k \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{4},$$

und wegen (3.2.5) haben wir:

$$0 \leq (\tilde{S}\xi)'(t) \leq \lambda_\xi \quad \text{für} \quad \frac{3}{4} \leq t \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Also gilt: } \tilde{S}\xi(1) &\leq \frac{3}{4}k + \frac{1}{4}\lambda_\xi \leq \frac{3}{4}k + \frac{k}{4c}\xi(1) \leq \\ &\leq \frac{3}{4}k + \frac{k}{4c} \frac{4kc}{4c - k} = \frac{3}{4}k + \frac{k^2}{4c - k} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} k (4c - k) + k^2}{4c - k} = \frac{3 kc + \frac{1}{4} k^2}{4c - k} < \frac{4 kc}{4c - k}.$$

Also erhalten wir auch im Falle (b) $\tilde{\xi} \in B$.

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\xi(1) - \int_0^{\frac{1}{4}} f_{\lambda_{\xi}}(\xi(t)) dt \geq \frac{1}{2} \quad \text{gilt, falls } \xi(1) > \frac{2c}{4c - k} \text{ ist.}$$

Nun gilt wegen (3.2.3):

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f_{\lambda_{\xi}}(\xi(t)) dt \leq \frac{1}{4} \lambda_{\xi}, \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} \xi(1) - \int_0^{\frac{1}{4}} f_{\lambda_{\xi}}(\xi(t)) dt &\geq \xi(1) - \frac{1}{4} \lambda_{\xi} \geq \xi(1) - \frac{k}{4c} \xi(1) \\ &= \left(1 - \frac{k}{4c}\right) \xi(1) \geq \frac{4c - k}{4c} \frac{2c}{4c - k} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Satz (3.2) ist damit vollständig bewiesen.

(3.3) Bemerkung

Neben wenigstens einer "Periode - 3 - Lösung" für ein spezielles $\lambda > 1$ besitzt (A_{λ}) unter den Voraussetzungen des Satzes (3.2) für jedes $\lambda \geq$ eine periodische Lösung vom Typ (H_4) , denn der Operator $R_{f_{\lambda}}$ (vergl. § 1) läßt die Menge Q invariant, und aus der Beschränktheit der f_{λ} folgt dann, daß $R_{f_{\lambda}}(Q)$ beschränkt ist. Aufgrund des Schauder'schen Fixpunktsatzes muß $R_{f_{\lambda}}$ dann einen Fixpunkt in Q haben.

(3.4) Bemerkung

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, ungerade und monoton wachsende Nichtlinearität und

$\xi \in \tilde{K} = \{\xi \in C[0,1] \mid \xi(0) = 0 \text{ und } \xi \text{ monoton wachsend}\}$,

derart daß gilt:

$$(*) \quad 0 < \xi(1) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\xi(s)) \, ds.$$

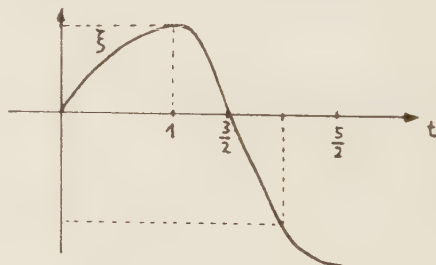
Aufgrund der Monotonie von f und ξ und da $f(0) = 0$, folgt daraus:

$$(**) \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\xi(s)) \, ds > \xi(1).$$

Bezeichnet $u(\xi): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung von

(I) $u'(t) = -f(u(t-1))$ mit der Startvorgabe ξ , so erhalten wir aus (*) und (**): $u(\xi)(\frac{3}{2}) = 0$ und

$$-u(\xi)(2) > \xi(1) \geq \xi(\frac{1}{2}).$$



Deshalb kann es, falls die ungerade und stetige Nichtlinearität f monoton wachsend ist, keine periodische Lösung u von (I) geben, für die gilt:

$$u(t) > 0 \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{3}{2} \text{ und } u(t+\frac{3}{2}) = -u(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

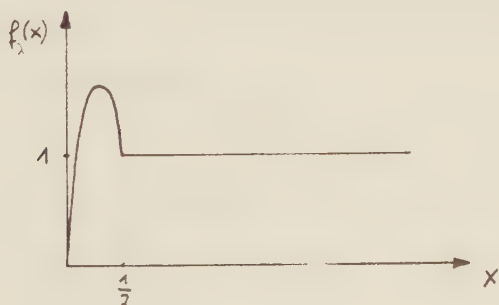
Wir wollen jetzt das Phänomen des Auftretens strukturell verschiedenartiger periodischer Lösungen von

$$(A_\lambda) \quad u'(t) = -f_\lambda(u(t-1))$$

für eine sehr spezielle Klasse stetiger Scharen ungerader und stetiger Funktionen etwas genauer untersuchen. Damit diese Untersuchung aber nicht unangemessen umfangreich gerät, werden wir dabei zum Teil heuristisch argumentieren und einige Behauptungen nicht oder nur unvollständig beweisen.

Es sei $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, eine stetige Schar ungerader und stetiger Funktionen, für die gilt:

$$(3.5.1) \quad f_\lambda(x) \geq 0 \quad \text{für } x \geq 0 \quad \text{sowie} \quad f_\lambda(x) = 1 \quad \text{für} \\ x \geq \frac{1}{2} \quad \text{und alle } \lambda \geq 1.$$



Außerdem wollen wir für alle $\lambda \geq 1$ definieren und voraussetzen:

$$(3.5.2) \quad x_\lambda := \int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(x) \, dx \geq \frac{1}{2}$$

und

(3.5.3) Falls $f_\lambda(y_\lambda) \geq 1$ für ein $y_\lambda \geq 0$, so gilt
 $f_\lambda(x) \geq 1$ für alle $x \geq y_\lambda$.

Es sei nun für ein beliebiges $\lambda \geq 1$

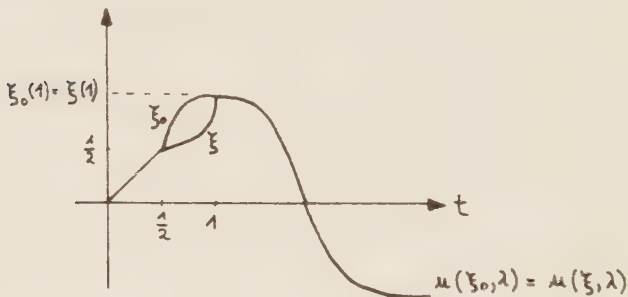
$\xi_0 \in Q_\lambda := \{\xi \in C[0,1] \mid \xi \text{ monoton wachsend, } \xi(t) = t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und } \xi(1) \geq x_\lambda\}$,

und es bezeichne (wie im Beweis von Satz (3.2))

$u = u(\xi_0, \lambda): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösungstrajektorie von (A_λ)

mit Startvorgabe ξ_0 . Diese ist für $t \geq 1$ nur abhängig

von $\xi_0(1)$, da für alle $\xi \in Q_\lambda$ gilt: $f_\lambda(\xi(t)) = 1, \frac{1}{2} \leq t < 1$.



Außerdem kann man die erste Nullstelle $z_1 = z_1(\xi_0, \lambda) > 1$

von u explizit berechnen. Ist nämlich $\xi_0(1) = x_\lambda + c, c \geq 0$,

so gilt: $z_1 = \frac{3}{2} + c$. Ordnen wir nun einem solchen $\xi_0 \in Q_\lambda$

die durch

$$S_\lambda \xi_0(t) = -u(z_1 + t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

definierte Funktion $S_\lambda \xi_0$ zu, so ist $S_\lambda \xi_0$ aufgrund unserer

Voraussetzungen enthalten in

$Q := \{ \xi \in C[0,1] \mid \xi \text{ monoton wachsend, } \xi(t) = t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \}$.

Auf den elementaren, aber relativ technischen Beweis wollen wir verzichten. Die wesentliche Voraussetzung für den Beweis ist die Bedingung (3.5.3).

Wir haben damit also eine stetige Abbildung $S_\lambda: Q_\lambda \rightarrow Q$ definiert, deren Fixpunkte uns periodische Lösungen von (A_λ) liefern.

Da nun für $\xi \in Q_\lambda$ das Bild $S_\lambda \xi \in Q$ nur von $\xi(1)$ abhängt, induziert S_λ die stetige Abbildung:

$$h_\lambda: [x_\lambda, \infty) \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty) \\ x \mapsto S_{\lambda, \xi_x}(1), \text{ falls } \xi_x \in Q_\lambda \text{ und } \xi_x(1) = x.$$

Natürlich können wir Fixpunkte von h_λ mit Fixpunkten von S_λ und somit mit periodischen Lösungen von (A_λ) identifizieren. Die Abbildung h_λ kann man nun aber wie folgt explizit aufschreiben: Es gilt für $x \in [x_\lambda, \infty)$:

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{2} + \frac{x - x_\lambda + \frac{1}{2}}{x - x_\lambda} \int_{x_\lambda}^x f_\lambda(x - g(s)) ds.$$

Dabei sei $g_\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiert durch: $g_\lambda(s) = \int_0^s f_\lambda(x) dx$.

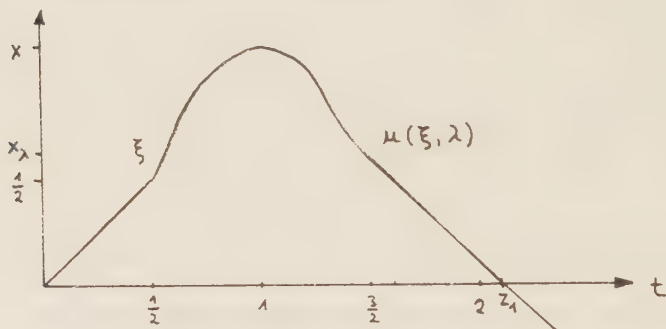
Daß diese explizite Darstellung von h_λ richtig ist, wollen wir nur für den einfachen Fall $x \geq x_\lambda + \frac{1}{2}$ beweisen. Auch für $x < x_\lambda + \frac{1}{2}$ beruht der Beweis wesentlich auf der Tatsache, daß uns für jedes $\xi \in Q_\lambda$ die erste Nullstelle $z_1(\xi, \lambda) \geq 1$ von $u(\xi, \lambda)$ bekannt ist (siehe oben).

Sei also $\xi \in Q_\lambda$ mit $x = \xi(1) \geq x_\lambda + \frac{1}{2}$, und es sei $z_1 \geq 1$ die erste Nullstelle von $u = u(\xi, \lambda)$. Es gilt dann $z_1 \geq 2$ (Gleichheit genau dann, wenn $\xi(1) = x_\lambda + \frac{1}{2}$) und

$$u(z_1 - t) = t \quad \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

und

$$u(z_1 - t) \geq \frac{1}{2} \quad \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$



Deshalb erhalten wir:

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= -u(z_1 + 1) = -\int_{z_1-1}^{z_1} f_\lambda(u(s)) \, ds = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(s) \, ds = \\ &= \frac{1}{2} + x_\lambda. \end{aligned}$$

Schreiben wir andererseits $x = x_\lambda + \frac{1}{2} + c$ für ein $c \geq 0$, so erhalten wir aus der expliziten Darstellung von h_λ :

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= \frac{1}{2} + \int_{x-x_\lambda}^{x-x_\lambda+\frac{1}{2}} f_\lambda(x-g_\lambda(s)) \, ds = \\ &= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}+c}^{1+c} f_\lambda(x_\lambda + \frac{1}{2} + c - g_\lambda(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Da nun aber wegen (3.5.1) und (3.5.2) $g_\lambda(s) = x_\lambda + s - \frac{1}{2}$ für $s \geq \frac{1}{2}$ gilt, folgt daraus:

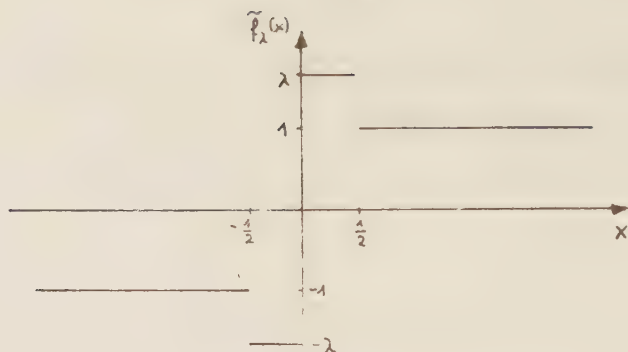
$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}+c}^{1+c} f_\lambda\left(x_\lambda + \frac{1}{2} + c - x_\lambda - s + \frac{1}{2}\right) ds \\ &= \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}+c}^{1+c} f_\lambda(1+c-s) ds = \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(s) ds = \\ &= \frac{1}{2} + x_\lambda. \end{aligned}$$

Was wir insbesondere daraus entnehmen können, ist, daß die Funktion h_λ konstant ist auf $[x_\lambda + \frac{1}{2}, \infty)$ und daß $x_\lambda + \frac{1}{2}$ ein Fixpunkt von h_λ ist. Dieser entspricht gerade dem in Q_λ eindeutig bestimmten Fixpunkt von S_λ , der auch Fixpunkt von R_{f_λ} ist, welchen wir wiederum mit einer periodischen Lösung von (A_λ) vom Typ (H_4) identifizieren können.

Uns interessiert nun, inwieweit (abhängig von f_λ)

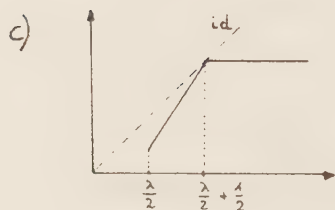
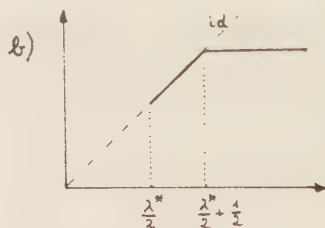
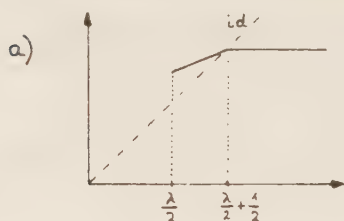
S_λ noch andere Fixpunkte in Q_λ besitzen kann, die nicht R_{f_λ} -Fixpunkte sind. Dazu wählen wir zunächst, abweichend von unseren bisherigen Stetigkeitsvoraussetzungen, als Nichtlinearitätenschar $\tilde{f}_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, die folgenden Treppenfunktionen:

$$\tilde{f}_\lambda(x) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \cdot \lambda & \text{für } |x| < \frac{1}{2} \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{für } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



Man kann dann die zugehörige Funktionenschar

$\tilde{h}_\lambda: [\frac{\lambda}{2}, \infty) \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty)$, $\lambda \geq 1$, als stetige, stückweise affin - lineare Funktionen verifizieren (vergl. H. Peters [37]), deren Charakteristika in Abhängigkeit von λ wir in den drei folgenden Bildern verdeutlichen wollen.



a) $1 \leq \lambda \leq \lambda^*$

b) $\lambda = \lambda^*$

c) $\lambda > \lambda^*$

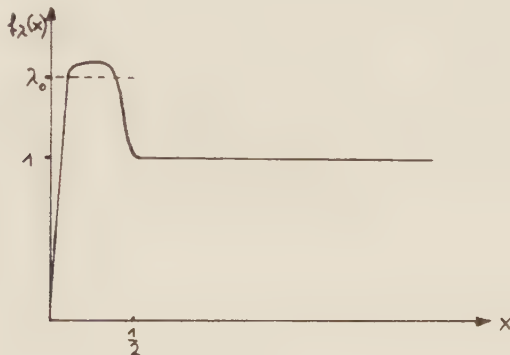
Für einen "kritischen" Parameter λ^* (den man explizit berechnen kann) ist jeder Punkt des Intervalls $[\frac{\lambda^*}{2}, \frac{\lambda^*}{2} + \frac{1}{2}]$ Fixpunkt von $\tilde{h}_{\lambda^*}$.

Geben wir nun ein festes $\lambda_0 > \lambda^*$ vor und "approximieren" die Treppenfunktion $\tilde{f}_0 := \tilde{f}_{\lambda_0}$ durch eine stetige Schar differenzierbarer Funktionen $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, die den Voraussetzungen (3.5.1), (3.5.2) und (3.5.3) genügt sowie die folgenden zusätzlichen Eigenschaften hat:

$$(i) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) = \tilde{f}_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

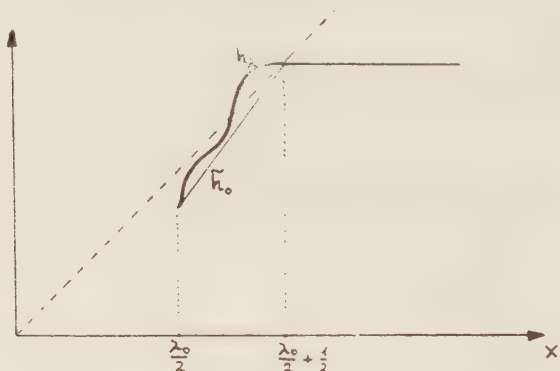
$$(ii) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_0^x f_\lambda(s) - \tilde{f}_0(s) ds \right| = 0,$$

$$(iii) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f_\lambda(s) ds = \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_0(s) ds = \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{für alle } \lambda \geq 1,$$



so haben die zugehörigen Funktionen h_λ , $\lambda \geq 1$, alle den Definitionsbereich $[\frac{\lambda_0}{2}, \infty)$ und approximieren die Funktion $\tilde{h}_0 := \tilde{h}_{\lambda_0}$ gleichmäßig für $\lambda \rightarrow \infty$. Für genügend großes $\lambda > 1$ gilt deshalb insbesondere $h_\lambda(\frac{\lambda_0}{2}) < \frac{\lambda_0}{2}$ (vergl. Bild c)). Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese Ungleichung für alle $\lambda \geq 1$ erfüllt ist.

Andrerseits haben wir die Funktionen f_λ , $\lambda \geq 1$, als differenzierbar vorausgesetzt, was die Differenzierbarkeit der h_λ impliziert. Da nun aber h_λ konstant ist auf $[\frac{\lambda_0}{2} + \frac{1}{2}, \infty)$, folgt daraus $h'_\lambda(\frac{\lambda_0}{2} + \frac{1}{2}) = 0$ für alle $\lambda \geq 1$ und deshalb:

$$h_\lambda(x) > x \quad \text{für } x \in (\frac{\lambda_0}{2} + \frac{1}{2} - \varepsilon_\lambda, \frac{\lambda_0}{2} + \frac{1}{2}) \quad \text{und ein } \varepsilon_\lambda > 0.$$


Mit dem Zwischenwertsatz erhalten wir daraus schließlich für alle $\lambda \geq 1$ die Existenz eines Fixpunktes von h_λ , der von $\frac{\lambda_0}{2} + \frac{1}{2}$ verschieden ist.

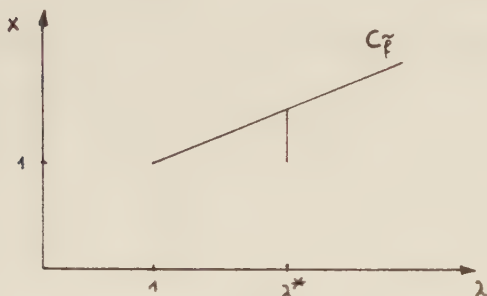
Somit besitzt für eine solche Funktionenschar f_λ , $\lambda \geq 1$, die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(A_\lambda) \quad u'(t) = -f_\lambda(u(t-1))$$

für alle $\lambda > 1$ wenigstens zwei strukturell verschiedene periodische Lösungen, wovon die eine vom Typ (H_4) ist, also insbesondere die Periode 4 hat und die andere eine Periode besitzt, die echt kleiner als 4 ist.

Zum Abschluß dieses Kapitels soll noch auf das folgende Phänomen aufmerksam gemacht werden:

Betrachten wir für die Treppenfunktionsschar $\tilde{f}_\lambda$, $\lambda \geq 1$, die Menge $C_{\tilde{f}} \subset \mathbb{R}^2$ der Lösungen (x, λ) von $\tilde{h}_\lambda(x) = x$, $\lambda \geq 1$ und $x \geq \frac{\lambda}{2}$, so erhalten wir das folgende Bild:



Für den "kritischen" Parameter λ^* verzweigen die Lösungen (x, λ^*) , $x \in [\frac{\lambda^*}{2}, \frac{\lambda^*}{2} + \frac{1}{2})$, von den in einem gewissen Sinne trivialen Lösungen $(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \geq 1$.

Wählen wir hingegen eine stetige Schar $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, stetig differenzierbarer, ungerader Nichtlinearitäten, die den Bedingungen (3.5.1), (3.5.2) und (3.5.3) genügt und für die $f'_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \geq 1$, ebenfalls eine stetige Schar ist, dann sind die zugehörigen $h_\lambda: [\lambda_\lambda, \infty) \rightarrow [\frac{1}{2}, \infty)$ stetig differenzierbare Funktionen, und $h'_\lambda(x)$, $\lambda \geq 1$ und $x \geq x_\lambda$, ist stetig abhängig von x und λ .

Nun gilt $h'_\lambda(x_\lambda + \frac{1}{2}) = 0$ für alle $\lambda \geq 1$. Deshalb gibt es für jedes kompakte Intervall $[\lambda_1, \lambda_2] \subset [1, \infty)$ ein $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) > 0$, so daß $h'_\lambda(x) < 1$ für alle $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ und $x \in [x_\lambda + \frac{1}{2} - \varepsilon, x_\lambda + \frac{1}{2}]$

gilt. Man überlegt sich leicht, daß es dann keine Lösungen von $h_\lambda(x) = x$ für $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ und $x \in [x_\lambda + \frac{1}{2} - \varepsilon, x_\lambda + \frac{1}{2})$ geben kann.

Deshalb kann das Phänomen der Verzweigung von Lösungen für solche Nichtlinearitätenscharen nicht auftreten.

Kapitel II

§ 4 Die Gleichung $u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$

Die Techniken, die zur Behandlung des Periodizitätsproblems für (I) $u'(t) = -f(u(t-1))$ entwickelt worden sind (Verschiebeoperator, asymptotische Fixpunkttheorie, Browder's Fixpunktsatz u.a), lassen sich zumindest bisher nur dann auch für zeitverzögerte Differentialgleichungen mit verteilter Verzögerung, etwa der Gestalt

$$u'(t) = - \int_{-1}^{-1+\delta} f(u(t+a)) da,$$

anwenden, wenn $\delta \leq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt wird (vergl. z.B. Nussbaum [32], Walther [42]).

Dagegen läßt das Periodizitätsproblem für die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(II) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$$

mit ungerader Nichtlinearität $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine operatortheoretische Formulierung als Fixpunktproblem zu, die ähnlich der in Kapitel I, § 1 für die Gleichung (I) spezielle periodische Lösungen von (II) liefert. Die Ergebnisse und Beweismethoden dieses Kapitels orientieren sich von daher sehr an denen aus Kapitel I, § 1 und § 2, und werden deshalb auch nur verkürzt dargestellt. Einige der Resultate werden wir im Kapitel III verallgemeinern können auf

Gleichungen der Gestalt

$$(III) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, d\mu(a)$$

mit monoton wachsenden $\mu: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$, die eine gewisse noch zu präzisierende Symmetrieeigenschaft haben.

Die speziellen periodischen Lösungen von (II), deren Existenz wir (unter geeigneten Voraussetzungen an f) beweisen wollen, entsprechen in ihrer Periode und in ihren Symmetrieeigenschaften gerade den periodischen Lösungen der linearen Gleichung

$$u'(t) = - \frac{\pi^2}{2} \int_{-1}^0 u(t+a) \, da, \text{ die von der Gestalt}$$

$u(t) := \alpha \sin(\pi t), \, t \in \mathbb{R}, \, \alpha > 0$, sind.

(4.1) Definition (vergl. Definition (1.2))

Eine periodische Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt vom Typ (H_2) , wenn gilt:

$$(4.1.1) \quad u(t) > 0 \quad \text{für } 0 < t < 1$$

$$(4.1.2) \quad u(-t) = -u(t) \quad \text{und} \quad u(t+1) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Periodische Funktionen vom Typ (H_2) haben also insbesondere die Periode 2.

Es sei nun $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade und stetige Funktion, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (II) vom Typ (H_2) und $\xi_u := u|_{[0, \frac{1}{2}]}$. Es gilt dann aufgrund der Symmetrieeigenschaften von u und der Ungeradheit von f für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\begin{aligned}\xi_u'(t) &= u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da = \\ &= - \int_{t-1}^{-t} f(u(a)) da - \int_{-t}^t f(u(a)) da = \\ &= \int_t^{1-t} f(u(a)) da = \int_t^{\frac{1}{2}} f(u(a)) da + \int_{\frac{1}{2}}^{1-t} f(u(a)) da = \\ &= 2 \int_t^{\frac{1}{2}} f(\xi_u(a)) da .\end{aligned}$$

(Die Ableitungen von ξ_u in 0 und $\frac{1}{2}$ sind dabei als einseitige Ableitungen zu verstehen.)

Deshalb haben wir für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ die folgende Identität:

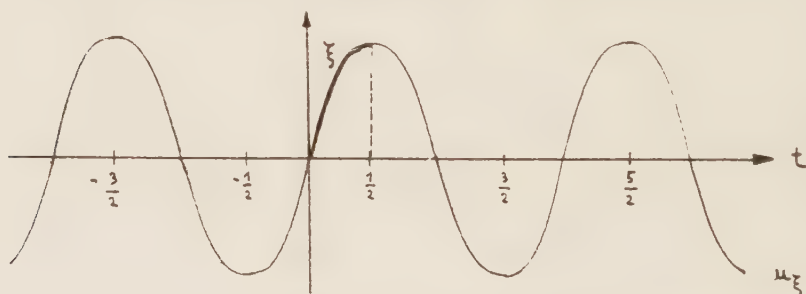
$$\xi_u(t) = 2 \int_0^t \int_s^{\frac{1}{2}} f(\xi_u(a)) da ds.$$

Bezeichnet nun $Y \subset C[0, \frac{1}{2}]$ den Banachraum aller stetigen Funktionen $\xi: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\xi(0) = 0$ (versehen mit der Supremumsnorm) und definieren wir für $\xi \in Y$:

$$T_f \xi(t) = 2 \int_0^t \int_s^{\frac{1}{2}} f(\xi(a)) da ds, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

so haben wir dadurch einen stetigen Operator $T_f: Y \rightarrow Y$ definiert, der, wie man sich mit Hilfe des Satzes von Arzela - Ascoli leicht überlegt, sogar vollstetig ist.

Ist nun $\xi \in Y$ ein Fixpunkt von T_f , für den $\xi(t) > 0$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$, gilt, und definieren wir $u_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die eindeutig bestimmte periodische Funktion vom Typ (H_2) , die auf $[0, \frac{1}{2}]$ mit ξ übereinstimmt,



so ist u_ξ stetig differenzierbar und genügt für alle $t \in \mathbb{R}$ der Gleichung (II), was man unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften von u_ξ und f leicht überprüft.

Wir haben damit die folgende Äquivalenz bewiesen:

(4.2) Satz

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ungerade, dann besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(II) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$$

eine periodische Lösung vom Typ (H_2) genau dann, wenn der Operator $T_f: Y \rightarrow Y$ einen Fixpunkt $\xi \in Y$ besitzt mit $\xi(t) > 0$, $0 < t \leq \frac{1}{2}$. Es gilt dann $u|_{[0, \frac{1}{2}]} = \xi$, also insbesondere

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| = \|\xi\|.$$

Aufgrund dieser Äquivalenz können wir nun analog zu den Sätzen (1.4) und (1.11) sowie den Korollaren (1.8) und (1.9) aus dem Kapitel I die folgenden Resultate beweisen:

(4.3) Satz (vergl. Satz (1.4))

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade, stetige Funktion. Ferner sei für positive reelle Zahlen z und für $0 \leq x < z$ definiert:

$$\rho(x, z) := \left(1 - \frac{x^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Es gebe Zahlen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a_0 \leq b_0$ und monoton wachsende, stetige Funktionen $h, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß

$$(4.3.1) \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq b_0,$$

$$(4.3.2) \quad \int_x^{b_0} \left(g(s) - \frac{\pi^2}{2} s\right) \rho(s, b_0) ds \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq b_0,$$

$$(4.3.3) \quad \int_x^{a_0} \left(h(s) - \frac{\pi^2}{2} s\right) \rho(s, a_0) ds \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq a_0.$$

Dann besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung (II) eine periodische Lösung u vom Typ (H_2) mit

$$a_0 \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| \leq b_0.$$

Zur Veranschaulichung der Voraussetzungen des Satzes vergleiche man Satz (1.4) sowie Beispiel (1.5) und (1.6) im Kapitel I. Natürlich sind (4.3.2) und (4.3.3) insbesondere dann erfüllt, wenn

$$(4.3.4) \quad \int_x^{b_0} g(s) - \frac{\pi^2}{2} s \, ds \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq b_0$$

und

$$(4.3.5) \quad \int_x^{a_0} h(s) - \frac{\pi^2}{2} s \, ds \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq a_0$$

erfüllt sind. Deshalb erhalten wir wie im Beispiel (1.6) von Kapitel I unendlich viele periodische Lösungen von (II), wenn die Nichlinearität $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist durch: $f(x) = \frac{\pi^2}{2} x + \sin(\frac{\pi}{2} x)$.

Beweis

Der Beweis des Satzes (4.3) wird - analog zum Beweis von Satz (1.4) - geführt, indem wir zeigen, daß der vollstetige Operator $T_f: Y \rightarrow Y$ die abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge

$$A := \{t \in Y \mid a_0 \sin(\pi t) \leq t \leq b_0 \sin(\pi t)\}$$

invariant läßt. Mit dem Schauder'schen Fixpunktsatz und Satz 4.2 folgt dann die Behauptung.

Für den Beweis der Invarianz von A unter T_f genügt es, für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ zu zeigen:

$$(i) \quad 2 \int_0^t \int_s^{\frac{1}{2}} g(b_0 \sin(\pi \tau)) \, d\tau \, ds \leq b_0 \sin(\pi t),$$

$$(ii) \quad 2 \int_0^t \int_s^{\frac{1}{2}} h(a_0 \sin(\pi \tau)) \, d\tau \, ds \leq a_0 \sin(\pi t) .$$

Denn da $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$ für alle $x \in [0, b_0]$ gilt und da g und h monoton wachsend sind, folgt dann wie im Beweis von Satz (1.4) die Behauptung.

Zum Beweis von (i):

$$\text{Es gilt: } b_0 \sin(\pi t) = 2 \int_0^t \int_s^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^2}{2} b_0 \sin(\pi \tau) \, d\tau \, ds, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} .$$

Deshalb genügt es, für $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ zu zeigen:

$$\int_s^{\frac{1}{2}} g(b_0 \sin(\pi \tau)) - \frac{\pi^2}{2} b_0 \sin(\pi \tau) \, d\tau \leq 0 .$$

Das erhält man durch Variablentransformationen und mit Bedingung (4.3.2) wie folgt:

$$\begin{aligned} & \int_s^{\frac{1}{2}} g(b_0 \sin(\pi \tau)) - \frac{\pi^2}{2} b_0 \sin(\pi \tau) \, d\tau = \\ &= \int_{\sin(\pi s)}^1 \frac{1}{\pi} (g(b_0 \tau) - \frac{\pi^2}{2} b_0 \tau) \frac{d \arcsin(\tau)}{d\tau} \, d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi b_0} \int_{b_0 \sin(\pi s)}^{b_0} (g(\tau) - \frac{\pi^2}{2} \tau) \rho(\tau, b_0) \, d\tau \leq 0 . \end{aligned}$$

Der Beweis von (ii) wird natürlich vollkommen analog

geführt. Der Satz (4.3) ist damit vollständig bewiesen.

Die nun folgenden Resultate werden wir nicht beweisen. Ihre Beweise ergeben sich aus den Beweisen der analogen Resultate aus § 1, auf die wir jeweils hinweisen werden.

(4.4) Korollar (vergl. Korollar (1.8))

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade und stetig und erfülle $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$. Gibt es dann ein $x_1 > 0$ derart, daß

$$f(x) \geq \frac{\pi^2}{2} x \quad \text{für alle } x \in [0, x_1]$$

und ein $x_2 > x_1$ derart, daß

$$f(x) < \frac{\pi^2}{2} x - c \quad \text{für alle } x \geq x_2 \quad \text{und ein } c > 0,$$

dann besitzt (II) eine nichttriviale periodische Lösung vom Typ (H_2) .

(4.5) Korollar (vergl. Korollar (1.9))

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, ungerade und erfülle $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$. Außerdem mögen die folgenden Limites existieren:

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

wobei wir $\alpha = \infty$ zulassen wollen. Gilt dann $\alpha > \frac{\pi^2}{2} > \beta$, so besitzt (II) eine nichttriviale periodische Lösung.

Daß die Behauptung des Korollars (4.5) auch dann richtig bleibt, wenn $\alpha < \frac{\pi^2}{2} < \beta < \infty$ gilt, werden wir im folgenden Paragraphen noch sehen.

(4.6) Satz (vergl. Satz (1.11))

Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade, stetige und monoton wachsende Funktion. Für $z > 0$ und $0 \leq x < z$ definieren wir wiederum $\rho(x, z) := (1 - \frac{x^2}{z^2})^{-\frac{1}{2}}$.

Es gebe Zahlen $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $0 \leq a_0 < b_0 < c_0 < d_0$ derart, daß

$$(4.6.1) \quad \int_x^{a_0} (f(s) - \frac{\pi^2}{2} s) \rho(s, a_0) ds \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq a_0,$$

$$(4.6.2) \quad \int_x^{b_0} (f(s) - \frac{\pi^2}{2} s) \rho(s, b_0) ds < 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq b_0,$$

$$(4.6.3) \quad \int_x^{c_0} (f(s) - \frac{\pi^2}{2} s) \rho(s, c_0) ds > 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq c_0,$$

$$(4.6.4) \quad \int_x^{d_0} (f(s) - \frac{\pi^2}{2} s) \rho(s, d_0) ds \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq d_0.$$

Dann gibt es wegen Satz (4.3) zunächst einmal zwei periodische Lösungen u_1 und u_2 von

$$(II) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$$

mit $c_0 \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_1(t)| \leq d_0$ und $a_0 \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_2(t)| \leq b_0$,

wobei u_2 die triviale Lösung $u_2 \equiv 0$ sein kann, wenn $a_0 = 0$ gilt.

Zusätzlich zu diesen gibt es aber noch eine weitere periodische Lösung u_3 von (II) vom Typ (H_2) , die von u_1 und

u_2 verschieden ist und für die gilt:

$$a_0 \leq \max_{t \in \mathbb{R}} |u_3(t)| \leq d_0$$

und $b_0 \sin(\pi t_0) < u_3'(t_0) < c_0 \sin(\pi t_0)$ für ein $t_0 \in (0, \frac{1}{2}]$.

Erfüllt f im Satz (4.6) ferner die Voraussetzung $f(x)x > 0$ für $x \neq 0$, so ergibt sich aus einem Ergebnis von T. Laetsch ([22], Theorem 2.2) sowie aus den Überlegungen des folgenden Paragraphen, daß die Ungleichung

$u_2(t) < u_3(t) < u_1(t)$ für $0 < t < 1$ erfüllt sein muß.

§ 5 Kontinua periodischer Lösungen der parameterab-

hängigen Gleichung $u'(t) = -\lambda \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da$

Wie wir im Kapitel I mehrfach erwähnten, besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung (I) $u'(t) = -f(u(t-1))$ für ungerade Nichtlinearitäten $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine periodische Lösung u vom Typ (H_4) , wenn das Anfangswertproblem

$$(*) \quad \begin{cases} v' &= -f(w) \\ w' &= f(v) \\ v(0) &= 0, \quad w(0) = -r \end{cases}$$

für ein $r > 0$ eine periodische Lösung (v, w) mit Periode 4 und $v(t) > 0$, $0 < t < 1$, besitzt. Wir benutzten diesen Zusammenhang, um eine globale Parametrisierung der perio-

dischen Lösungen vom Typ (H_4) der parameterabhängigen Gleichung (I_λ) $u'(t) = -\lambda f(u(t-1))$ zu gewinnen.

Noch offensichtlicher ist der Zusammenhang zwischen den periodischen Lösungen von (II) vom Typ (H_2) und bestimmten Lösungen eines einfachen nichtlinearen Randwertproblems. Ist nämlich für eine stetige, ungerade Nichtlinearität $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung u von (II) vom Typ (H_2) gegeben, so gilt, wie wir in § 4 feststellten, für

$$\xi_u = u \Big|_{[0, \frac{1}{2}]};$$

$$\xi_u(0) = 0, \xi_u(t) > 0 \text{ und } \xi_u(t) = 2 \int_0^t \int_s^{\frac{1}{2}} f(\xi_u(\tau)) d\tau ds,$$

für $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

Durch zweimalige Differentiation von ξ_u erhalten wir daraus:

$$\xi_u''(t) = -2 f(\xi_u(t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Da offensichtlich $\xi_u'(\frac{1}{2}) = 0$ gilt, ist ξ_u also eine Lösung des Randwertproblems

$$(+) \quad \begin{cases} \xi'' = -2 f(\xi) \\ \xi(0) = \xi'(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt ist natürlich jede Lösung ξ des Randwertproblems (+) mit $\xi(t) > 0, 0 < t \leq \frac{1}{2}$, - solche Lösungen von (+) nennen wir fortan positive Lösungen - ein Fixpunkt des Operators T_f und liefert uns wegen Satz (4.2) eine periodische Lösung von (II) vom Typ (H_2) .

Wir haben also die folgende Äquivalenz:

(5.1) Satz

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ungerade, dann besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung (II) eine periodische Lösung u vom Typ (H_2) genau dann, wenn das Randwertproblem (+) eine positive Lösung ξ besitzt. Es gilt dann ferner

$$\xi = u \Big|_{[0, \frac{1}{2}]}$$

(5.2) Bemerkung

Aufgrund dieses Satzes liefern uns die Resultate von § 4 auch hinreichende Bedingungen für die Existenz positiver Lösungen des Randwertproblems (+), wobei sowohl die Ungeradheit von f als auch die Voraussetzung $f(0) = 0$ bei der Formulierung der entsprechenden Resultate für das Randwertproblem natürlich verzichtbar sind.

Wir wollen uns nun der parameterabhängigen zeitverzögerten Differentialgleichung

$$(II_{\lambda}) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) da, \quad t \in [0, 1],$$

zuwenden. Dabei wollen wir für f voraussetzen:

- (B) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine ungerade, stetige Funktion, die $f(x)x > 0$ für alle $x \neq 0$ erfüllt.

Unser Interesse gilt - analog zu § 2 - der Struktur und dem asymptotischen Verhalten der Familien (u_{λ}, λ) für positive reelle λ derart, daß u_{λ} eine periodische Lösung

von (II_λ) vom Typ (H_2) ist, oder, äquivalent dazu, der Struktur und dem asymptotischen Verhalten der Familien $(\xi_\lambda, \lambda) \in Y \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ derart, daß ξ_λ eine positive Lösung des parameterabhängigen Randwertproblems

$$(+_\lambda) \quad \begin{cases} \xi'' &= -2\lambda f(\xi) \\ \xi(0) &= \xi'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

ist. Darüber geben uns nun aber die Resultate von T. Laetsch [22] Aufschluß. Er zeigt in dieser Arbeit, daß die positiven Lösungen von $(+_\lambda)$ unter geeigneten Voraussetzungen an die Nichtlinearität f wie folgt konstruiert werden können:

Definiere für $x \geq 0$: $g(x) := \int_0^x f(s) ds$. Für ein beliebiges $r > 0$ sei die von r stetig abhängige Zahl λ_r

gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda_r^2} = \int_0^r g(r) - g(x) dx.$$

Dann wird durch die Gleichung

$$2t \frac{1}{\lambda_r^2} = \int_0^{\xi(t)} (g(r) - g(x))^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

eine Funktion $\xi: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die zweimal stetig differenzierbar und eine positive Lösung von $(+_\lambda)$ für $\lambda = \lambda_r$ ist. Ferner gilt: $\|\xi\| = \xi(\frac{1}{2}) = r$.

Aufgrund dieses Sachverhalts gelingt es T. Laetsch, unter anderem die folgenden Ergebnisse zu beweisen, die wir zusammenfassen wollen in dem Satz:

(5.3) Satz (vergl. Satz 2.2)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzung (B), und die Menge $Y \times \mathbb{R}^+$ sei versehen mit der Metrik:

$$d((\xi_1, \lambda_1), (\xi_2, \lambda_2)) = \|\xi_1 - \xi_2\| + |\lambda_1 - \lambda_2|, \quad \xi_1, \xi_2 \in Y, \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+. \text{ Dann gilt:}$$

(a) Es gibt eine stetige Abbildung

$$P: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow Y \times \mathbb{R}^+$$

derart, daß

$$P(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) = \{(\xi, \lambda) \mid \xi \text{ ist eine positive Lösung von } (+_\lambda)\}$$

und mit der Eigenschaft, daß für alle $r > 0$ mit

$$P(r) = (\xi_r, \lambda_r) \text{ gilt: } \|\xi_r\| = \xi_r\left(\frac{1}{2}\right) = r.$$

(b) Ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = \alpha > 0$ (oder gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \infty), \text{ so ist } P \text{ in } 0 \text{ stetig ergänzbar durch}$$

$$P(0) := (0, \frac{\pi^2}{2\alpha}) \text{ (bzw. durch } P(0) = (0, 0)). \text{ Falls}$$

$$f'(0) = 0 \text{ gilt, so erhalten wir } \lambda_r \rightarrow \infty \text{ für } r \rightarrow 0,$$

$$\text{wobei } \lambda_r \text{ die zweite Komponente von } P(r) = (\xi_r, \lambda_r)$$

bezeichne.

(c) Existiert der folgende Limes: $\beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$

so erhalten wir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_r = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = \infty, \\ \frac{\pi^2}{2\beta}, & \text{falls } \beta \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } \beta = 0. \end{cases}$$

Aus diesem Satz erhalten wir:

(5.4) Korollar (vergl. Korollar (4.5))

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzung (B).

Außerdem mögen die folgenden Limites in $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ existieren:

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} .$$

Dann besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung (II) eine nichttriviale periodische Lösung, falls

$$\alpha > \frac{\pi^2}{2} > \beta \quad \text{oder} \quad \alpha < \frac{\pi^2}{2} < \beta .$$

Beweis:

Die Behauptung ist eine einfache Folgerung aus den Sätzen (5.3) und (5.1) sowie dem Zwischenwertsatz.

Kapitel III

Wir wollen in diesem Kapitel die operatortheoretischen Methoden und einige wesentliche Resultate für das Periodizitätsproblem bei den Gleichungen (I) und (II) auf Gleichungen des Typs

$$(III) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, d\mu(a)$$

verallgemeinern. Wie zuvor beschränken wir uns dabei auf ungerade Nichtlinearitäten f , müssen aber auch geeignete Symmetrievoraussetzungen an μ stellen, die im folgenden noch präzisiert werden.

Die Beweistechniken dieses Kapitels orientieren sich weitestgehend an Ideen von R. Nussbaum in [30], wo ebenfalls unter Ausnutzung von Symmetrievoraussetzungen die Existenz spezieller periodischer Lösungen von zeitverzögerten Differentialgleichungen der Gestalt

$$u'(t) = - \sum_{i=1}^n f_i(u(t - \gamma_i)) + f_i(u(t - q + \gamma_i))$$

bewiesen wird. Die dort angewendeten Techniken lassen sich nämlich relativ leicht mit Approximationsargumenten auf Gleichungen des Typs (III) übertragen. Gleichzeitig wird dadurch deutlich werden, daß - zumindest in dem hier dargestellten Kontext - periodische Lösungen von Differentialgleichungen mit kontinuierlich verteilter Verzögerung sich beliebig genau durch periodische Lösungen von Differentialgleichungen mit diskret verteil-

ter Verzögerung approximieren lassen und umgekehrt.

Zunächst wollen wir aber die Definition des Riemann - Stieltjes - Integrals kurz in Erinnerung rufen, unter anderem um damit die Symmetrievoraussetzungen, die wir an μ stellen wollen, präzise zu machen. Unsere Darstellung orientiert sich an der in [40].

§ 6 Kurze Einführung des Riemann - Stieltjes - Integrals

Durch $\tau := \{t_0, t_1, \dots, t_n \mid -1=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=0, n \in \mathbb{N}\}$

sei eine Unterteilung des Intervalls $[-1,0]$ gegeben.

Die Menge aller möglichen Unterteilungen von $[-1,0]$

wird mit $T_{[-1,0]}$ bezeichnet.

Ist $\tau = \{t_0, \dots, t_n\} \in T_{[-1,0]}$, so heißt eine Menge der Gestalt

$\sigma(\tau) := \{s_0, s_1, \dots, s_n \mid s_i \in [t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n\}$

ein Zwischenstellensystem für τ .

Die Zahl $d(\tau) := \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$ wird als Feinheit der

Unterteilung τ bezeichnet. Eine Folge (τ_k) , $k \in \mathbb{N}$, von Elementen aus $T_{[-1,0]}$ heißt ausgezeichnete Unterteilungsfolge von $[-1,0]$, wenn die zugehörige Folge $(d(\tau_k))$, $k \in \mathbb{N}$, eine Nullfolge ist.

Ist τ eine Unterteilung von $[-1,0]$, $\sigma(\tau)$ ein Zwischenstellensystem für τ und sind $\xi, \mu: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen,

dann heißt

$$S(\tau, \sigma(\tau)) := \sum_{i=1}^n \xi(s_i) (\mu(t_i) - \mu(t_{i-1}))$$

die zur Unterteilung τ mit dem Zwischenstellensystem $\sigma(\tau)$ gehörige Zwischensumme von ξ bzgl. μ .

(6.1) Definition

Konvergieren zu jeder beliebigen ausgezeichneten Unterteilungsfolge (τ_k) , $k \in \mathbb{N}$, von $[-1, 0]$ und jeder zugeordneten Folge $(\sigma(\tau_k))$, $k \in \mathbb{N}$, von Zwischenstellensystemen die zugehörigen Zwischensummenfolgen $(S(\tau_k, \sigma(\tau_k)))$, $k \in \mathbb{N}$, von ξ bezüglich μ alle gegen denselben (endlichen) Grenzwert, so heißt dieser das Riemann - Stieltjes - Integral von ξ bezüglich μ über $[-1, 0]$ und wird mit

$$\int_{-1}^0 \xi(t) d\mu(t)$$

bezeichnet.

(6.2) Satz

Ist $\xi: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, so existiert das Riemann - Stieltjes - Integral von ξ bezüglich μ über $[-1, 0]$.

Für einen Beweis siehe zum Beispiel [40].

Wir wollen zwei monotone Funktionen $\mu, \nu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent nennen, wenn für jedes stetige $\xi: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-1}^0 \xi(t) d\mu(t) = \int_{-1}^0 \xi(t) d\nu(t) \quad \text{gilt.}$$

Man überlegt sich leicht, daß aufgrund der Definition des Riemann - Stieltjes - Integrals zwei monotone Funktionen $\mu, \nu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ insbesondere dann äquivalent sind, wenn sie sich im Inneren des Intervalls $[-1, 0]$ in höchstens endlich vielen Punkten unterscheiden. Deshalb sind zum Beispiel die folgenden drei Treppenfunktionen äquivalent:

$$\mu_1(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [-1, -\frac{1}{2}]; \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

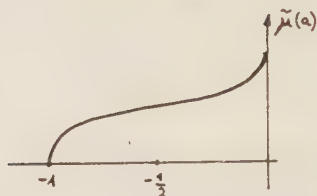
$$\mu_2(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [-1, -\frac{1}{2}); \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = -\frac{1}{2}; \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$\mu_3(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [-1, -\frac{1}{2}); \\ 1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

(6.3) Definition

Eine monotone Funktion $\nu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt symmetrisch bezüglich $-\frac{1}{2}$, wenn es eine äquivalente monotone Funktion $\tilde{\nu}: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, derart daß für alle $a \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt:

$$\tilde{\mu}\left(-\frac{1}{2}\right) - \tilde{\mu}\left(-\frac{1}{2} - a\right) = \tilde{\mu}\left(-\frac{1}{2} + a\right) - \tilde{\mu}\left(-\frac{1}{2}\right).$$



μ_1 , μ_2 und μ_3 sind einfache Beispiele für monotone Funktionen, die symmetrisch bezüglich $-\frac{1}{2}$ sind.

§ 7 Gleichungen mit symmetrisch verteilter Verzögerung

Wir wollen jetzt die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(III) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, d\mu(a)$$

im Hinblick auf die Existenz spezieller periodischer Lösungen untersuchen. Dabei wollen wir an f und μ die folgenden Voraussetzungen stellen:

(H_f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige, ungerade Funktion für die $f(x)x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(H _{μ}) $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine bezüglich $-\frac{1}{2}$ symmetrische, monoton wachsende Funktion, die auf dem offenen Intervall $(-1, 0)$ nicht konstant ist.

Wir werden dabei in einigen Beweisen ohne besonderen Hinweis davon ausgehen, daß μ selbst die Symmetrievoraus-

setzung erfüllt, daß also für alle $a \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt:

$$\mu(-\frac{1}{2}) - \mu(-\frac{1}{2} - a) = \mu(-\frac{1}{2} + a) - \mu(-\frac{1}{2}) .$$

(7.1) Beispiele

(7.1.1) Bezeichnet μ eine der Treppenfunktionen μ_1, μ_2 oder μ_3 aus dem vorangegangenen Paragraphen, so erfüllt μ die Voraussetzungen (H_μ) , und es gilt aufgrund der Definition des Riemann - Stieltjes - Integrals:

$$\int_{-1}^0 u(t + a) d\mu(a) = u(t - \frac{1}{2})$$

für jede stetige Funktion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Gleichung (III) reduziert sich also für dieses spezielle μ zu einer Gleichung der Gestalt

$$(*) \quad u'(t) = -f(u(t - \frac{1}{2})).$$

Das Periodizitätsproblem für diese spezielle Gleichung ist bisher am weitestgehenden untersucht worden; vergleiche dazu auch Kapitel I. Dabei wurde allerdings wie in der Literatur üblich der Delay auf -1 normiert, also die Gleichung $u'(t) = -f(u(t-1))$ untersucht.

Man überlegt sich aber leicht, daß diese beiden Gleichungen in dem folgenden Sinne äquivalent sind:

Ist $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, auf $[1, \infty)$ differenzierbare Funktion, für die $y'(t) = -f(y(t-1))$ für $t \geq 1$ gilt, so ist $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(t) = y(2t)$, $t \geq 0$, eine stetige, auf $[\frac{1}{2}, \infty)$ differenzierbare Funktion, und es

gilt:

$$u'(t) = -2 f(u(t - \frac{1}{2})) \text{ für alle } t \geq 1.$$

Diese Äquivalenz überträgt sich analog auf den allgemeinen Fall, es stellt also keine Verallgemeinerung dar, zeitverzögerte Differentialgleichungen der Gestalt

$$u'(t) = - \int_q^0 f(u(t+a)) d\mu(a)$$

für $q \neq -1$ zu untersuchen.

(7.1.2) Gegeben $a_0, \dots, a_n \in [0,1]$, mit $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, derart daß für $i = 1, \dots, n$, gilt:

$$a_i = 1 - a_{n-i}.$$

Definiere $\mu: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\mu(a) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \leq a \leq -a_n, \\ i+1 & \text{für } -a_{n-i} < a \leq -a_{n-i-1}, \quad 0 \leq i < n-1 \\ n+1 & \text{für } -a_0 < a < 0, \end{cases}$$

dann erfüllt μ die Voraussetzung (H), und es gilt mit diesem speziellen μ :

$$\int_{-1}^0 u(t+a) d\mu(a) = \sum_{i=0}^n u(t - a_i)$$

für alle stetigen Funktionen $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung (III) reduziert sich also in diesem Fall zu

$$u'(t) = - \sum_{i=0}^n f(u(t - a_i))$$

mit den bezüglich $\frac{1}{2}$ symmetrisch verteilten Delays

$a_i, i = 0, \dots, n$.

Das Periodizitätsproblem für zeitverzögerte Differentialgleichungen solchen Typs, speziell auch mit ungeraden Nichtlinearitäten und symmetrisch verteilten Delays, ist von Nussbaum in [30] untersucht worden.

(7.1.3) Wählt man für μ die Identität, so ist (III) natürlich von der Gestalt

$$(II) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t + a)) da.$$

Wir haben uns im Kapitel (II) eingehender mit diesem Spezialfall befaßt.

Das vorrangige Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von:

(7.2) Satz

Es mögen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzungen (H_f) bzw. (H_μ) erfüllen. Außerdem nehmen wir an, daß die folgenden Limites

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

existieren und endlich sind.

Definieren wir dann

$$\lambda_1 := -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sin(\pi a) \, d\mu(a)$$

und gilt entweder

$$\alpha\lambda_1 < 1 < \beta\lambda_1 \quad \text{oder} \quad \beta\lambda_1 < 1 < \alpha\lambda_1,$$

dann besitzt

$$(III) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, d\mu(a)$$

eine nichttriviale periodische Lösung $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt: $u(-t) = -u(t) = u(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie $u(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, 1]$.

Solche periodischen Lösungen von (III) wollen wir im folgenden als vom Typ (H_2') bezeichnen. Sie sind im wesentlichen vom Typ (H_2) (vergl. Definition (4.1)) mit der Ausnahme, daß man im allgemeinen nicht zeigen kann, daß sie strikt positiv sind auf dem offenen Intervall $(0, 1)$.

Als Beispiel soll das Ergebnis des Satzes (7.2) für die Gleichung

$$(1) \quad u'(t) = - \int_{-1}^0 f(u(t+a)) \, da$$

mit ungerader Nichtlinearität $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $f(x)x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, beschrieben werden.

Die Gleichung (1) genügt in dieser Form unseren Voraussetzungen nicht. Ist aber $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

(1) und definieren wir die Funktion $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch
 $v(t) := u(\frac{3}{2} t)$, $t \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{3}{2} u'(\frac{3}{2} t) = -\frac{3}{2} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(u(\frac{3}{2} t + a)) da = \\ &= -\frac{9}{4} \int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} f(u(\frac{3}{2} (t + a))) da = -\frac{9}{4} \int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} f(v(t + a)) da. \end{aligned}$$

v ist dann also eine Lösung von

$$(1') \quad v'(t) = -\frac{9}{4} \int_{-1}^0 f(v(t + a)) d\mu(a)$$

mit

$$\mu(a) := \begin{cases} -\frac{2}{3} & \text{für } -1 \leq a \leq -\frac{2}{3}, \\ a & \text{für } -\frac{2}{3} \leq a \leq -\frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{3} & \text{für } -\frac{1}{3} \leq a \leq 0, \end{cases}$$

einer Gleichung, die unseren Voraussetzungen genügt.

Umgekehrt ist natürlich für jede Lösung $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von
 (1'), die durch $u(t) := v(\frac{2}{3} t)$, $t \in \mathbb{R}$, definierte Funk-
 tion $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (1).

Für die Gleichung (1') mit diesem speziellen μ gilt nun:

$$\lambda_1 := -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sin(\pi a) d\mu(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}} \sin(\pi a) da = \frac{1}{\pi^2}$$

Wenn also $\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ und $\beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ existieren

(und endlich sind), so besitzt nach Satz (7.2) die Gleichung (1') und damit die Gleichung (1) eine nicht-triviale periodische Lösung, falls

$\alpha > \frac{4}{9} \pi^2 > \beta$ oder $\alpha < \frac{4}{9} \pi^2 < \beta$ gilt.

Der Beweis des Satzes (7.2) beruht im wesentlichen auf einer Anwendung der Definition des Riemann - Stieltjes - Integrals und den Ergebnissen von Nussbaum [30] sowie auf Fixpunktsätzen für nichtlineare, vollstetige Operatoren in geordneten Banachräumen (siehe etwa Krasnoselskii [21] oder Amann [2]).

Wir werden dabei, um die Verständlichkeit und Vollständigkeit des Beweises zu erreichen, an einigen Stellen Nussbaum's Argumenten direkt folgen und nicht nur auf die entsprechenden Textstellen in [30] verweisen.

Alle weiteren Resultate für das Periodizitätsproblem für die Gleichung (III), die eine Entsprechung in Nussbaum's Arbeit haben, können analog bewiesen werden und werden deshalb am Schluß dieses Kapitels ohne Beweis nur aufgelistet.

Zunächst wollen wir eine fixpunkttheoretische Formulierung des Problems finden.

Es bezeichne C den Banachraum aller reellwertigen stetigen Funktionen $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $u(-t) = -u(t) = u(t+1)$ für

alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Für $u \in C$ definieren wir:

$$\|u\| := \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|.$$

Man sieht sehr leicht, daß die Abbildung $C \ni u \mapsto u|_{[0, \frac{1}{2}]}$ eine Isometrie zwischen C und dem in Kapitel II betrachteten Banachraum Y ($Y = \{\xi \in C[0, \frac{1}{2}] \mid \xi(0) = 0\}$ mit der Supremumsnorm) ist. Wir könnten auch durchaus die operatortheoretische Formulierung unseres Problems als Fixpunktproblem in Y schreiben. Die Verwendung des Banachraumes C erleichtert aber an vielen Stellen die Notationen und Beweise.

Mit $K \subset C$ wollen wir den Kegel $K := \{u \in C \mid u|_{[0, 1]} \geq 0\}$ bezeichnen.

Für $u \in C$ definieren wir die stetige Funktion $Fu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(A) \quad Fu(t) := - \int_0^t \int_{-1}^0 f(u(s+a)) \, d\mu(a) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist ein $u \in C \setminus \{0\}$ mit $Fu = u$ eine nicht-triviale periodische Lösung von (III).

Wir wollen zeigen, daß durch (A) ein vollstetiger Operator von C in sich definiert wird, der den Kegel K invariant läßt, falls f und μ die Voraussetzungen (H_f) bzw. (H_μ) erfüllen. Dazu beweisen wir zunächst:

(7.3) Lemma

Es sei $u \in C$ und $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion,

die (H_μ) erfüllt. Dann ist die Funktion $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$v(s) := \int_{-1}^0 u(s+a) d\mu(a), \quad s \in \mathbb{R},$$

gleichmäßiger Limes einer Folge von Funktionen $Z_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, der Gestalt

$$Z_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n (u(s - \gamma_i^n) + u(s - 1 + \gamma_i^n)), \quad s \in \mathbb{R},$$

mit geeigneten $\alpha_i^n \in \mathbb{R}^+$ und $\gamma_i^n \in [0,1]$, $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$.

Beweis

Da u ungerade ist und $u(s) = u(s+2)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt, genügt es, die Behauptung für $s \in [0,1]$ zu zeigen.

Sei $(\tau_n) = \{-1 = a_0^n < a_1^n \dots < a_{2n}^n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Unterteilungen des Intervalls $[-1,0]$, deren Feinheit $d(\tau_n) = \max_{0 \leq i < 2n} |a_i^n - a_{i+1}^n|$ gegen 0 konvergiert

für $n \rightarrow \infty$. Wir wollen des weiteren annehmen, daß diese Unterteilungen symmetrisch bezüglich $-\frac{1}{2}$ sind, daß also $a_i^n = -1 - a_{2n-i}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, 2n\}$ gilt. Aufgrund der Definition des Riemann - Stieltjes - Integrals konvergiert dann die Folge

$$S_n(s) := \sum_{i=1}^{2n} (\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n)) u(s + \frac{a_{i-1}^n + a_i^n}{2}), \quad n \in \mathbb{N},$$

zunächst zumindest punktweise für alle $s \in [0,1]$ gegen $v(s)$.

Angenommen, diese Konvergenz wäre nicht gleichmäßig. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, eine Folge (s_k) , $k \in \mathbb{N}$, in $[0,1]$ und

eine unbeschränkte Folge natürlicher Zahlen (n_k) , $k \in \mathbb{N}$,
derart daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\dagger) \quad |S_{n_k}(s_k) - v(s_k)| > \varepsilon.$$

Dabei können wir o. B. d. A. davon ausgehen, daß die
Folge (s_k) gegen einen Grenzwert s^* in $[0,1]$ konvergiert
für $k \rightarrow \infty$. Andererseits haben wir:

$$\begin{aligned} |S_{n_k}(s_k) - v(s_k)| &\leq |S_{n_k}(s^*) - v(s^*)| + |S_{n_k}(s^*) - S_{n_k}(s_k)| \\ &\quad + |v(s^*) - v(s_k)|. \end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite der Ungleichung
konvergiert wegen der punktweisen Konvergenz der S_{n_k}
gegen 0, ebenso der dritte Summand, da v stetig ist und
 $s_k \rightarrow s^*$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Schreibt man den zweiten Summan-
den explizit hin,

$$\begin{aligned} |S_{n_k}(s^*) - S_{n_k}(s_k)| &= \\ &= \left| \sum_{i=1}^{2n_k} (\mu(a_1^{n_k}) - \mu(a_{i-1}^{n_k})) \left(u\left(s^* + \frac{a_{i-1}^{n_k} + a_i^{n_k}}{2}\right) - u\left(s_{n_k} + \frac{a_{i-1}^{n_k} + a_i^{n_k}}{2}\right) \right) \right|, \end{aligned}$$

so sieht man, daß dieser wegen der gleichmäßigen Stetig-
keit von u ebenfalls gegen 0 konvergiert für $k \rightarrow \infty$. Wir
erhalten also insgesamt

$$|S_{n_k}(s_k) - v(s_k)| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

im Widerspruch zu $(\dagger)$. Also konvergiert (S_n) , $n \in \mathbb{N}$,

tatsächlich gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen v .

Unser Lemma ist vollständig bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß die S_n eine Darstellung der Gestalt

$$S_n(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n (u(s - \gamma_i^n) + u(s - 1 + \gamma_i^n))$$

erlauben. Nun gilt aber aufgrund der symmetrischen Verteilung der a_i^n , und da μ die Symmetriebedingung (H_μ) erfüllt, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n) = \mu(a_{2n+1-i}^n) - \mu(a_{2n-i}^n)$$

und

$$\frac{a_{2n+1-i}^n + a_{2n-i}^n}{2} = -1 - \frac{a_i^n + a_{i-1}^n}{2}.$$

Wenn wir also für $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ definieren

$$\alpha_i^n := \mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n) \quad \text{und} \quad \gamma_i^n := -\frac{a_i^n + a_{i-1}^n}{2},$$

so erhalten wir die gewünschte Darstellung von S_n und damit die Behauptung des Lemmas.

Mit Hilfe des Lemmas (7.3) können wir nun die meisten der folgenden Resultate auf die entsprechenden Resultate von R. Nussbaum aus [30] zurückführen.

(7.4) Lemma

Die Funktionen f und μ mögen den Bedingungen (H_f) bzw. (H_μ) genügen. Dann wird durch die Gleichung (A) ein vollstetiger Operator F von C in sich definiert, der den Kegel K invariant läßt.

Beweis

Aus dem Lemma 1 in [30] folgt insbesondere, daß für Operatoren F_n , die für $u \in C$ definiert sind durch

$$F_n u(t) := - \int_0^t \sum_{i=1}^n \alpha_i^n (f(u(s - \gamma_i^n)) + f(u(s - 1 + \gamma_i^n)))$$

mit $\alpha_i^n \in \mathbb{R}^+$ und $\gamma_i^n \in [0,1]$, die behaupteten Invarianzeigenschaften erfüllt sind. Zusammen mit Lemma (7.3) folgt daraus, daß auch F den Banachraum C in sich abbildet, als auch, daß $F(K) \subset K$ gilt.

Die Stetigkeit von $F: C \rightarrow C$ ist offensichtlich, und da F beschränkte Mengen stetiger Funktionen auf eine Menge stetig differenzierbarer Funktionen mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen abbildet, folgt mit dem Satz von Arzela - Ascoli, daß F sogar ein vollstetiger Operator ist.

Analog zur Vorgehensweise von Nussbaum [30] wollen wir jetzt das Spektrum des linearen Operators $L: C \rightarrow C$, der für $u \in C$ definiert ist durch:

$$Lu(t) := - \int_0^t \int_{-1}^0 u(s+a) \, d\mu(a) \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

untersuchen.

(7.5) Lemma

Die monoton wachsende Funktion $\mu: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzung (H_μ) . Für ungerade natürliche Zahlen r definieren wir die reellen Zahlen

$$\lambda_r := - \frac{1}{\pi r} \int_{-1}^0 \sin(r\pi a) \, d\mu(a) .$$

Diese bilden zusammen mit $0 \in \mathbb{R}$ das Spektrum der Komplettifizierung des linearen - und nach Lemma (7.4) - vollstetigen Operators $L: C \rightarrow C$. Weiterhin gilt $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_1 > |\lambda_r|$ für alle ungeraden natürlichen Zahlen $r \neq 1$; der Spektralradius von $L: C \rightarrow C$ ist also gerade λ_1 .

Beweis

Für ungerade natürliche Zahlen r definieren wir die Funktion $u_r \in C$ durch $u_r(t) = \sin(\pi r t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Wir wollen zunächst zeigen, daß diese $u_r \in C$ Eigenfunktionen von L zu den Eigenwerten λ_r sind.

Es sei $(\tau_n) := (\{-1 = a_0^n < a_1^n < \dots < a_{2n}^n = 0\})$, $n \in \mathbb{N}$,

eine Folge von Unterteilungen des Intervalls $[-1,0]$, deren Feinheit $d(\tau_n)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Weiterhin wollen wir annehmen, daß diese Unterteilungen symmetrisch bezüglich $-\frac{1}{2}$ sind, daß also

$$a_i^n = -1 - a_{2n-i}^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } i \in \{0, \dots, 2n\}$$

gilt. Aus dem Beweis von Lemma (7.3) folgt dann für $t \in \mathbb{R}$:

$$Lu_r(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \int_0^t \sum_{i=1}^{2n} (\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n)) u_r(s + \frac{a_{i-1}^n + a_i^n}{2}) ds.$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften von μ und den Unterteilungen τ_n haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n) = \mu(a_{2n+1-i}^n) - \mu(a_{2n-i}^n)$$

und

$$\frac{a_{2n+1-i}^n + a_{2n-i}^n}{2} = -1 - \frac{a_i^n + a_{i-1}^n}{2}.$$

Andrerseits gilt, wie man durch Integration sofort sieht, für ein beliebiges $\gamma \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$- \int_0^t \alpha u_r(s-\gamma) + \alpha u_r(s-1+\gamma) ds = - \frac{2\alpha}{\pi r} \sin(-\gamma\pi r) u_r(t).$$

Damit folgt, da $\sin(-\gamma\pi r) = \sin((-1+\gamma)\pi r)$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \sum_{i=1}^{2n} (\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n)) u_r(s + \frac{a_{i-1}^n + a_i^n}{2}) ds = \\ & = \sum_{i=1}^n - \int_0^t (\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n)) u_r(s + \frac{a_{i-1}^n + a_i^n}{2}) + \\ & \quad + (\mu(a_{2n+1-i}^n) - \mu(a_{2n-i}^n)) u_r(s + \frac{a_{2n+1-i}^n + a_{2n-i}^n}{2}) ds \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{\pi r} \sum_{i=1}^{2n} (\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n)) \sin\left(\frac{a_i^n + a_{i-1}^n}{2} \pi r\right) \right) u_r(t) .$$

Da nun schließlich aufgrund der Definition des Riemann-Stieltjes - Integrals

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} (\mu(a_i^n) - \mu(a_{i-1}^n)) \sin\left(\frac{a_i^n + a_{i-1}^n}{2} \pi r\right) =$$

$$= \int_{-1}^0 \sin(r\pi a) d\mu(a),$$

gilt also tatsächlich $Lu_r = \lambda_r u_r$.

Es seien nun $v, w \in C \setminus \{0\}$, derart daß für die Komplexifizierung von L gilt:

$$L(v + iw) = (\alpha + i\beta)(v + iw)$$

mit $\alpha + i\beta \neq 0$, wobei i in diesem Zusammenhang die imaginäre Einheit bezeichnet.

Wir können dann wie Nussbaum im Beweis von Lemma 3 in [30] wie folgt schließen:

Da v und w aus C sind, können sie als periodische Funktionen mit Periode 2 angesehen werden (wobei hier Periode nicht als minimale Periode verstanden werden soll) und je in eine Fourierreihe bezüglich $\sin(\pi \tau)$ und $\cos(\pi \tau)$ entwickelt werden. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Funktionen aus C folgt dann, daß nur die

Fourierkoeffizienten, die zu den $u_r = \sin(r\pi \epsilon)$, r ungerade, gehören, von Null verschieden sein können.

Es gilt dann also:

$$v = \sum_{r \text{ ungerade}} c_r u_r \quad \text{und} \quad w = \sum_{r \text{ ungerade}} d_r u_r,$$

Da nun L n -mal stetig differenzierbare Funktionen in $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktionen überführt, sind v und w unendlich oft stetig differenzierbar. Wie aus der Theorie der Fourierreihen bekannt ist, sind dann die Reihen $\sum_{r \text{ unger.}} c_r$ und $\sum_{r \text{ unger.}} d_r$ absolut konvergent. Deshalb gilt, da L stetig ist:

$$\begin{aligned} L(v + iw) &= \sum_{r \text{ unger.}} c_r L(u_r) + i \sum_{r \text{ unger.}} d_r L(u_r) = \\ &= \sum_{r \text{ unger.}} \lambda_r c_r u_r + i \sum_{r \text{ unger.}} \lambda_r d_r u_r. \end{aligned}$$

Durch Ausnutzung der Orthogonalität der u_r und da $L(v + iw) = (\alpha + i\beta)(v + iw)$ gilt, folgt dann für alle ungeraden $r \in \mathbb{N}$:

$$(\alpha - \lambda_r) c_r - \beta d_r = 0,$$

$$\beta c_r + (\alpha - \lambda_r) d_r = 0.$$

Also muß, wenn $c_r^2 + d_r^2 \neq 0$ gilt, $\alpha = \lambda_r$ und $\beta = 0$ sein. Deshalb besitzt L nur die im Lemma definierten reellen Eigenwerte λ_r . Da schließlich das Spektrum eines kompakten

linearen Operators nur aus Null und Eigenwerten besteht (Fredholm - Alternative), ist der erste Teil von Lemma (7.5) damit bewiesen.

Nach Voraussetzung (H_μ) ist die monoton wachsende Funktion $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $(-1, 0)$ nicht konstant. Deshalb gilt für jede stetige Funktion $\xi: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $(-1, 0)$ strikt positiv ist:

$$\int_{-1}^0 \xi(a) \, d\mu(a) > 0. \quad \text{Daraus folgt zunächst insbesondere:}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sin(\pi a) \, d\mu(a) > 0.$$

Nun gilt aber für jedes $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{p} |\sin(pt)| \leq |\sin(t)|,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn t ein ganzes Vielfaches von π ist. Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt (vergl. Lemma 2, [30]).

Also muß $|\sin(\pi a)| - \frac{1}{p} |\sin(p\pi a)| > 0$ für alle $a \in (-1, 0)$ und für alle $p > 1$ gelten. Damit erhalten wir für alle ungeraden natürlichen Zahlen $r \geq 3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - |\lambda_r| &\geq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 |\sin(\pi a)| \, d\mu(a) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{1}{r} |\sin(r\pi a)| \, d\mu(a) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 |\sin(\pi a)| - \frac{1}{r} |\sin(r\pi a)| \, d\mu(a) > 0. \end{aligned}$$

Unser Lemma ist damit vollständig bewiesen.

Wir wollen für den Beweis unseres Satzes (7.2) ein Resultat über nichttriviale Fixpunkte "linearisierbarer", kegelinvarianter Operatoren benutzen. Dazu erinnern wir zunächst an die folgenden Begriffe:

Sei X ein Banachraum, $P \subset X$ ein Kegel und $F: X \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann heißt F Fréchet - differenzierbar in o , wenn es eine stetige, lineare Abbildung $L_o: X \rightarrow X$ gibt derart, daß

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|F(x) - F(o) - L_o(x)\|}{\|x\|} = 0$$

ist. Läßt F den Kegel P invariant, so heißt F Fréchet - differenzierbar in o bezüglich P , wenn es eine stetige lineare Abbildung $L_o: X \rightarrow X$ gibt, die P invariant läßt und für die gilt:

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow 0 \\ x \in P}} \frac{\|F(x) - F(o) - L_o(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Weiterhin wollen wir die Abbildung $F: X \rightarrow X$ asymptotisch linear nennen, wenn es eine stetige, lineare Abbildung $L_\infty: X \rightarrow X$ gibt derart, daß gilt:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|F(x) - L_\infty(x)\|}{\|x\|} = 0;$$

und entsprechend, falls $F(P) \subset P$, asymptotisch linear bezüglich P , wenn es eine stetige, lineare Abbildung $L_\infty: X \rightarrow X$ gibt, für die gilt: $L_\infty(P) \subset P$ und

$$\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ x \in P}} \frac{\|F(x) - L(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

(7.6) Lemma

Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz (7.2) erhalten wir: Der für $u \in C$ durch

$$Fu(t) = - \int_0^t \int_{-1}^0 f(u(s+a)) \, d\mu(a) \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

definierte Operator $F: C \rightarrow C$ ist sowohl Fréchet - differenzierbar in 0 als auch asymptotisch linear, und es gilt:

$$(i) \quad L_0 = \alpha L,$$

$$(ii) \quad L_{0^*} = \beta L,$$

wenn $L: C \rightarrow C$ der für $u \in C$ durch

$$Lu(t) = - \int_0^t \int_{-1}^0 u(s+a) \, d\mu(a) \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

definierte vollstetige lineare Operator ist (vergl.

Lemma (7.5)) und α und β durch

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{bzw.} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

definiert sind.

Da F und L den Kegel K invariant lassen, folgt daraus insbesondere, daß F Fréchet - differenzierbar in 0 und asymptotisch linear bezüglich K ist.

Beweis von (i)

Wir haben zu zeigen, daß es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $r > 0$ gibt, so daß für alle $u \in C \setminus \{0\}$ mit $\|u\| \leq r$ gilt:

$$\frac{\|Fu - \alpha Lu\|}{\|u\|} < \varepsilon.$$

Da $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ existiert und endlich ist, gibt es

ein $r > 0$, so daß für alle $x \neq 0$ mit $|x| \leq r$ folgt:

$$\frac{|f(x) - \alpha x|}{|x|} < \frac{\varepsilon}{\mu(0) - \mu(-1)}.$$

(Wegen Bedingung (H_μ) ist $\mu(0) - \mu(-1) > 0$.)

Wir erhalten dann für alle $u \in C \setminus \{0\}$ mit $\|u\| \leq r$ und für alle $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{|Fu(t) - \alpha Lu(t)|}{\|u\|} &\leq \int_0^t \int_{-1}^0 \frac{|f(u(s+a)) - \alpha u(s+a)|}{\|u\|} d\mu(a) ds \\ &\leq \int_0^t \left(\max_{a \in [-1, 0]} \frac{|f(u(s+a)) - \alpha u(s+a)|}{\|u\|} \right) (\mu(0) - \mu(-1)) ds < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Da aber } \|Fu - \alpha Lu\| &:= \sup_{t \in \mathbb{R}} |Fu(t) - \alpha Lu(t)| = \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} |Fu(t) - \alpha Lu(t)|, \end{aligned}$$

folgt damit unsere Behauptung.

Beweis von (ii)

Wir haben zu zeigen: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein $R > 0$, so daß für alle $u \in C$ mit $\|u\| \geq R$ gilt:

$$\frac{\|Fu - \beta Lu\|}{\|u\|} < \varepsilon.$$

Nun existiert nach Voraussetzung $\beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

deshalb gibt es ein $R_1 > 0$, so daß für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq R_1$ gilt:

$$\frac{|f(x) - \beta x|}{|x|} < \frac{\varepsilon}{\mu(0) - \mu(-1)}.$$

Außerdem können wir ein $k > 0$ finden, derart daß

$$|f(x) - \beta x| < k \text{ ist für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq R_1.$$

Wähle $R := \max \left(\frac{(\mu(0) - \mu(-1)) k}{\varepsilon}, R_1 \right)$, dann gilt für

ein beliebiges $u \in C$ mit $\|u\| \geq R$:

$$\frac{\|Fu - \beta Lu\|}{\|u\|} \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t \int_{-1}^0 \frac{|f(u(s+a)) - \beta u(s+a)|}{\|u\|} d\mu(a) ds$$

$$\leq \int_0^1 \max_{a \in [-1,0]} \frac{|f(u(s+a)) - \beta u(s+a)|}{\|u\|} (\mu(0) - \mu(-1)) ds < \varepsilon,$$

was zu zeigen war.

Nach all diesen Vorbereitungen können wir nun den Beweis von Satz (7.2) auf Resultate von Krasnoselskii [21] oder auf das folgende Resultat von Amann [2] zurückführen:

(7.7) Satz (Theorem 13.6, [2])

Es seien X ein Banachraum und $K \subset X$ ein Kegel in X .
 $F: K \rightarrow K$ sei ein vollstetiger Operator mit $F(o) = o$,
der Fréchet - differenzierbar in o bezüglich K ist mit
Ableitung L_o und der gleichzeitig asymptotisch linear
ist mit asymptotischer Ableitung L_∞ . Weiterhin wollen
wir annehmen, daß 1 kein Eigenwert von L_o als auch von
 L_∞ zu einem Eigenvektor aus K ist. Dann hat F einen
nichttrivialen Fixpunkt in K , wenn eine der folgenden
Bedingungen erfüllt ist:

- (i) L_o hat keinen Eigenvektor in K zu einem Eigenwert, der größer als 1 ist, wohingegen L_∞ einen solchen besitzt.
- (ii) L_o besitzt einen Eigenvektor in K zu einem Eigenwert, der größer als 1 ist, während L_∞ einen solchen nicht besitzt.

Beweis von Satz (7.2)

Nach Lemma (7.4) ist $F: C \rightarrow C$ ein vollstetiger Operator,
der den Kegel K invariant läßt. Aus Lemma (7.6) wissen
wir, daß F Fréchet - differenzierbar in o bezüglich K
und asymptotisch linear ist mit

$$L_o = \alpha L \text{ und}$$

$$L_\infty = \beta L.$$

Aus Lemma (7.5) wissen wir, daß L eine Eigenfunktion

aus K zum positiven Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sin(\pi a) \, d\nu(a)$

besitzt und dieser sogar betragsmäßig der größte Eigenwert von $F: C \rightarrow C$ ist.

Deshalb sind, falls $\alpha\lambda_1 < 1 < \beta\lambda_1$ oder $\alpha\lambda_1 > 1 > \beta\lambda_1$, die Voraussetzungen von Satz (7.7) für $F: K \rightarrow K$ erfüllt. F besitzt dann also einen nichttrivialen Fixpunkt in K . Da dieser schließlich eine nichttriviale periodische Lösung von (III) vom Typ (H_2') ist, ist der Beweis von Satz (7.2) erbracht.

§ 8 Weitere Resultate und Bemerkungen

Wir wollen in diesem Paragraphen einige weitere Ergebnisse für das Periodizitätsproblem für die zeitverzögerte Differentialgleichung (III) ohne Beweis auflisten. Die Beweise ergeben sich teilweise aus den entsprechenden Resultaten von Nussbaum [30], auf die wir jeweils hinweisen werden, und aus den Überlegungen der Paragraphen 6 und 7.

So bleibt beispielsweise der Satz (7.2) auch dann richtig, wenn der Anstieg der Nichtlinearität f in 0 unendlich ist (Beispiel $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$), d.h., wenn

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \infty \quad \text{ist, vorausgesetzt, } \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

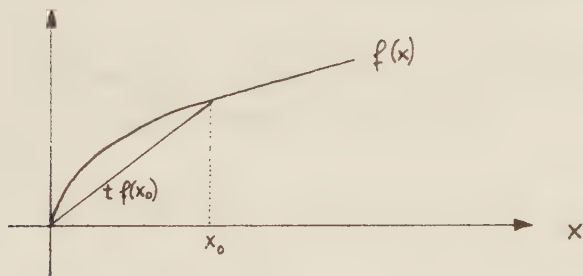
existiert und es gilt $\beta\lambda_1 < 1$ (vergl. Theorem 3, [30]).

Setzen wir zusätzlich voraus, daß f monoton wachsend ist, so erhalten wir - analog zu Theorem 4, [30] - auch dann eine nichttriviale periodische Lösung von (III) vom Typ (H_2') , falls $\beta = \infty$, $\alpha < \infty$ und $\alpha\lambda_1 < 1$ gilt.

Ebenso läßt sich das Eindeutigkeitsresultat von Nussbaum, - Theorem 7, [30] - auf unsere Situation übertragen:

(8.1) Satz

Es mögen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzungen (H_f) bzw. (H_μ) erfüllen. Außerdem wollen wir annehmen, daß f monoton wachsend ist und daß für alle $x > 0$ und alle $t \in (0, 1)$ gilt: $f(tx) > t f(x)$.



Dann hat die Gleichung (III) höchstens eine nichttriviale periodische Lösung vom Typ (H_2') .

(8.2) Beispiel

Sei $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ und μ eine beliebige Funktion, die (H_μ) erfüllt. Dann besitzt (III) wegen $\alpha = \infty$ und $\beta = 0$

zumindest eine nichttriviale periodische Lösung vom Typ (H_2') . Da aber andererseits auch die Voraussetzungen von Satz (8.1) erfüllt sind, hat (III) genau eine solche periodische Lösung.

Es scheint nicht sinnvoll, das Theorem 3 in [30], welches sich mit der Frage nach der Existenz schneller schwingender periodischer Lösungen befaßt, auf unsere Situation zu übertragen. Man müßte sich dann auf solche $\mu: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränken, die auf geeigneten Teilintervallen konstant sind. Wir wollen deshalb auf ein solches Resultat hier verzichten, zumal wir einige Begriffe und Ergebnisse, die für die Formulierung und den Beweis eines solchen Resultats notwendig wären, der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt haben.

Analog zu Gleichung (III) könnte man aber auch das Periodizitätsproblem für zeitverzögerte Differentialgleichungen der Gestalt

$$u'(t) = - \sum_{i=1}^n \int_{-1}^0 f_i(u(t+a)) d\mu_i(a)$$

untersuchen mit Funktionen $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mu_i: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$, die für $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$ je die Voraussetzungen (H_f) bzw. (H_μ) erfüllen. Es wird dann für $u \in C$ durch

$$Fu := \sum_{i=1}^n F_i u, \quad \text{mit}$$

$$F_i u(t) := - \int_0^t \int_{-1}^0 f_i(u(t+a)) d\mu_i(a), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

ein vollstetiger Operator von C in sich definiert, der wiederum den Kegel K invariant läßt und dessen Fixpunkte periodische Lösungen der obigen Differentialgleichung sind. Man kann dann analog zu Satz (7.2) das folgende Resultat beweisen:

(8.3) Satz

Die Funktionen $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mu_i: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, mögen je die Voraussetzungen (H_f) bzw. (H_μ) erfüllen. Des weiteren wollen wir annehmen, daß für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die folgenden Limites existieren und endlich sind:

$$\alpha_i := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_i(x)}{x} \quad \text{und} \quad \beta_i := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_i(x)}{x}.$$

Definieren wir dann für $1 \leq i \leq n$

$$\lambda_i := - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sin(\pi a) d\mu_i(a),$$

so besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$u'(t) = - \sum_{i=1}^n \int_{-1}^0 f_i(u(t+a)) d\mu_i(a)$$

eine nichttriviale periodische Lösung vom Typ (H_2') , vorausgesetzt, es gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i < 1 < \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i > 1 > \sum_{i=1}^n \beta_i \lambda_i.$$

Ebenso kann man das Periodizitätsproblem für Gleichungen des Typs

$$u'(t) = - \int_{-1}^0 f(a, u(t+a)) \, d\mu(a)$$

behandeln, wenn man voraussetzt, daß die Funktionen $f(a, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in [-1, 0]$, je die Bedingung (H_f) und $\mu: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ die Bedingung (H_μ) erfüllen und zusätzlich verlangt wird, daß $f(a, \cdot) = f(-1-a, \cdot)$, $-1 \leq a \leq 0$, gilt, eine zusätzliche Symmetrievoraussetzung. Wir wollen hier nicht näher auf diese Gleichungen eingehen.

§ 9 Schlußbemerkung

Die Symmetrievoraussetzungen, die wir an f und μ gestellt haben, machen die in diesem Kapitel betrachtete Gleichung sicherlich zu speziell, als daß sie für realistische Modelle - etwa bei Populationswachstumsmodellen (vergl. z.B. Dunkel [8] und May [24]) - relevant sein könnte.

Was die hier dargestellten Resultate dennoch interessant macht, ist, daß erstmals die Existenz periodischer Lösungen auch für solche Differentialgleichungen mit verteilter Verzögerung nachgewiesen werden konnte, bei denen die aktuelle Zustandsänderung von der bis in die

Gegenwart reichenden Vorgeschichte abhängt (d.h.

$\mu(a) < \mu(0)$ für alle $a \in [-1, 0)$).

Die bisher veröffentlichten Arbeiten zu diesem Problemkreis (siehe etwa Alt [1], Chow - Hale [6], Nussbaum [32], Walther [42]) benutzen in ihren Beweisen - neben anderen - die Voraussetzung, daß μ konstant ist auf $[-\frac{1}{2}, 0]$, betrachten also eigentlich nur Gleichungen der

der Gestalt
$$u'(t) = - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(u(t+a)) d\mu(a).$$

Dies liegt einerseits in der Schwierigkeit begründet, eine geeignete operatortheoretische Formulierung des Periodizitätsproblems als Fixpunktproblem zu finden - Konstruktion eines Definitionsbereichs für den Verschiebeoperator. Zum anderen ist aber im allgemeinen auch das Studium der zur linearisierten Gleichung gehörigen charakteristischen Gleichung

$$(C) \quad \lambda + \alpha \int_{-1}^0 e^{\lambda a} d\mu(a) = 0,$$

deren Wurzeln die Stabilität der Nulllösung des linearisierten Problems

$$u'(t) = - \alpha \int_{-1}^0 u(t+a) d\mu(a)$$

bestimmen, äußerst schwierig.

Für die von uns untersuchten symmetrischen Funktionen $\mu: [-1,0] \rightarrow \mathbb{R}$ ist allerdings das Theorem 3 von Walther [43] anwendbar. Denn schreiben wir für $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist die charakteristische Gleichung (C) äquivalent zu

$$x + \alpha \int_{-1}^0 e^{xa} \cos(ya) \, d\mu(a) = 0$$

und

$$y + \alpha \int_{-1}^0 e^{xa} \sin(ya) \, d\mu(a) = 0.$$

Daraus folgt sehr leicht, daß für $\lambda = i\pi$ und für

$$\alpha^* := - \left[\int_{-1}^0 \sin(\pi a) \, d\mu(a) \right]^{-1}$$

die Gleichung (C) erfüllt ist; wir haben also eine rein imaginäre Lösung von (C) mit Imaginärteil aus $[0, \pi]$.

Damit erhalten wir aus Theorem 3 [43], daß (C) zumindest lokal für $\alpha > \alpha^*$ Lösungen λ mit positivem Realteil hat, die Null-

lösung der linearen Gleichung $u'(t) = -\alpha \int_{-1}^0 u(t+a) \, d\mu(a)$

also instabil wird. Diese Destabilisierung der Nulllösung tritt dabei erwartungsgemäß gerade da auf, wo ein Eigenwert des linearen Operators $L_\alpha: C \rightarrow C$ mit $L_\alpha = \alpha L$ (vergl. Lemma (7.5)) größer als 1 wird.

Kapitel IV

Wir wollen in diesem letzten Kapitel einen weiteren Typ zeitverzögerter Differentialgleichungen vorstellen, bei denen man wiederum unter geeigneten Symmetrievoraussetzungen an die Nichtlinearitäten spezielle periodische Lösungen mit vorgegebener Periode erwarten kann.

§ 10 Zeitverzögerte Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Es sollen speziell Gleichungen der Gestalt

$$(IV) \quad u''(t) + f(u(t-1), u'(t-1)) + g(u(t)) = 0$$

im Hinblick auf die Existenz periodischer Lösungen untersucht werden. Dabei wollen wir an die stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Symmetrievoraussetzungen stellen:

(S_f) Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $f(-x, y) = f(x, y) = -f(x, -y)$,
 f soll also gerade in der ersten und ungerade in der zweiten Komponente sein.

(S_g) g ist ungerade.

Als Beispiele für Gleichungen, die unseren Symmetrievoraussetzungen genügen, haben wir

Gleichungen vom Liénard - Typ mit Verzögerung der Art

$$(1) \quad u''(t) + h(u(t-1)) u'(t-1) + g(u(t)) = 0$$

mit gerader Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ungerader Funktion

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dazu gehört speziell die folgende Van der Pol - Gleichung mit Verzögerung

$$(2) \quad u''(t) + a(1-(u(t-1))^2) u'(t-1) + u(t) = 0.$$

Wir werden noch zeigen, daß die Gleichung (2) für bestimmte $a > 0$ eine nichttriviale periodische Lösung besitzt.

Als weiteres Beispiel sei noch die Gleichung

$$(3) \quad u''(t) + a u'(t-1) + b \sin(u(t)) = c$$

genannt, die ebenfalls eine Gleichung vom Liénard - Typ mit Verzögerung ist.

Es liegen bislang (soweit dem Autor bekannt) keine theoretischen Ergebnisse über die Existenz periodischer Lösungen zeitverzögerter Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor, bei denen eine Verzögerung im Ableitungsterm (u') auftritt.

Dagegen gibt es eine Reihe von Ergebnissen für Gleichungen der Gestalt

$$(1') \quad u''(t) + h(u(t)) u'(t) + g(u(t-r)) = 0.$$

So konnte Grafton [9] nachweisen, daß die Gleichung

$$(2') \quad u''(t) + a(1 - (u(t))^2) u'(t) + u(t-r) = 0$$

ebenso wie die gewöhnliche Van der Pol - Gleichung ($r = 0$) für alle $a < 0$ und $r > 0$ eine nichttriviale periodische Lösung besitzt, deren Periode größer ist als $2r$. Die Ergebnisse von Grafton ([9], [10]), ebenso wie gewisse Verallgemeinerungen von Nussbaum ([25], [28]) für Gleichungen des Typs (1'), sind dabei aber keineswegs an Symmetrien gebunden, wie wir sie in der Van der Pol - Gleichung vorliegen haben.

Als weiteres Ergebnis konnte von Somolinos [39] bewiesen werden, daß die Gleichung (3')

$$(3') \quad u''(t) + a u'(t) + b \sin(u(t-r)) = 0$$

(die sogenannte "sunflower - equation") bei geeigneter Wahl der Parameter a, b und r eine nichttriviale periodische Lösung besitzt. Bei dieser Gleichung, die ja ebenfalls ein Spezialfall von (1') ist, ist die für die Beweise von Grafton und Nussbaum wesentliche Eigenschaft der Nichtlinearität g ($g(x)x > 0$ für $x \neq 0$) offensichtlich nicht erfüllt.

Eine Gleichung zweiter Ordnung mit Verzögerung, die nicht vom Liénard-Typ ist, wurde von an der Heiden [15] im Hinblick auf die Existenz nichttrivialer periodischer Lösungen untersucht. Aber auch bei dieser Gleichung tritt keine Verzögerung im Ableitungsterm auf.

Wir wollen nun analog zu unserem Vorgehen in den vorangegangenen Kapiteln einen geeigneten Operator definieren, dessen Fixpunkte uns spezielle periodische Lösungen für die Gleichungen (IV) liefern, sofern für f und g die Symmetrievoraussetzungen (S_f) und (S_g) erfüllt sind. Es bezeichne B den Banachraum aller stetigen Funktionen $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\phi(1) = 0$ gilt (versehen mit der Supremumsnorm).

Für $\phi \in B$ definieren wir die Funktion $Z\phi \in B$ durch:

$$Z\phi(t) := \int_t^1 f(\xi(1-s), \phi(1-s)) + g(\xi(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\text{wobei } \xi(s) := \int_0^s \phi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s \leq 1, \text{ gelten soll.}$$

Man überlegt sich leicht, daß auf diese Weise ein stetiger Operator von B in sich definiert wird, dessen Bilder stetig differenzierbar sind (in den Randpunkten einseitig), und mit dem Satz von Arzela - Ascoli weist man ebenso leicht nach, daß $Z: B \rightarrow B$ sogar ein vollstetiger Operator ist. Welche Bedeutung dieser Operator für das Periodizitätsproblem für die Gleichung (IV) hat, klärt der folgende Satz:

(10.1) Satz

Es seien $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die den Symmetriebedingungen (S_f) und (S_g) genügen mögen.

Dann besitzt der Operator $Z: B \rightarrow B$ einen nichttrivialen Fixpunkt ϕ genau dann, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Verzögerung

$$(IV) \quad u''(t) + f(u(t-1), u'(t-1)) + g(u(t)) = 0$$

eine nichttriviale periodische Lösung $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, für die $u(-t) = -u(t)$ und $u(t+2) = -u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie $u'(t) = \phi(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ gilt.

Beweis

Da wir schon ähnliche Beweise in dieser Arbeit geführt haben, wollen wir nur die eine Implikation der Äquivalenz beweisen.

Es sei $\phi \in B$ ein nichttrivialer Fixpunkt von Z , und es sei $\xi \in C[0,1]$ definiert durch:

$$\xi(t) := \int_0^t \phi(s) \, ds.$$

Da die Bilder von Elementen aus B unter Z stetig differenzierbar sind, ist somit ξ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die gilt: $\xi(0) = \xi'(1) = 0$.

Es bezeichne $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte periodische Funktion, für die $u(-t) = -u(t)$ und $u(t+2) = -u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie $u|_{[0,1]} = \xi$ gilt. Es ist u dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Das ergibt sich relativ leicht aus der "Konstruktion" von u aus ξ und aus der Tatsache, daß für die Ableitung u' von u gilt: $u'(-t) = u'(t)$ und $u'(t+2) = -u'(t)$, $t \in \mathbb{R}$, sowie $u'|_{[0,1]} = \phi$.

Wir wollen nun zeigen, daß u auch tatsächlich die Gleichung (IV) erfüllt. Aufgrund der Autonomie von (IV) und da $u(t+4) = u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, genügt es, wenn wir nachweisen, daß für jedes $t \in [-2, 2]$ die Gleichung $u''(t) = -f(u(t-1), u'(t-1)) - g(u(t))$ erfüllt ist.

Sei zunächst $t \in [0, 1]$, dann gilt aufgrund der Symmetrieeigenschaften von u , u' und f :

$$\begin{aligned} u''(t) &= \xi''(t) = \phi'(t) = -f(\xi(1-t), \phi(1-t)) - g(\xi(t)) = \\ &= -f(-u(t-1), u'(t-1)) - g(u(t)) = \\ &= -f(u(t-1), u'(t-1)) - g(u(t)). \end{aligned}$$

Ist nun $t \in [1, 2]$, so gilt $t = \tilde{t} + 1$ für ein $\tilde{t} \in [0, 1]$ und somit $u(t) = u(\tilde{t}+1) = u(1-\tilde{t}) = \xi(1-\tilde{t})$. Daraus folgt, da $1-\tilde{t} \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} u''(t) &= \xi''(1-\tilde{t}) = -f(u(-\tilde{t}), u'(-\tilde{t})) - g(u(1-\tilde{t})) \\ &= -f(-u(\tilde{t}), u'(\tilde{t})) - g(u(t)) \\ &\quad (\text{da } u(-\tilde{t}) = -u(\tilde{t}) \text{ und } u'(\tilde{t}) = u'(-\tilde{t})) \\ &= -f(u(t-1), u'(t-1)) - g(u(t)) \\ &\quad (\text{wegen der Symmetrie von } f \text{ und da } \tilde{t} = t-1). \end{aligned}$$

Für $t \in [-1, 0]$ gilt $u(t) = -u(-t) = -\xi(-t)$ mit $-t \in [0, 1]$. Daraus folgt mit dem, was wir schon gezeigt haben:

$$u''(t) = -\xi''(-t) = f(u(-t-1), u'(-t-1)) + g(u(-t)).$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften von u , u' , f und g erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} u''(t) &= f(-u(t+1), -u'(-t+1)) + g(-u(t)) \\ &= -f(u(t-1), u'(t-1)) - g(u(t)). \end{aligned}$$

Der Beweis für den letzten Fall ($t \in [-2, -1]$) wird vollkommen analog geführt. Der Beweis von Satz (10.1) kann somit als erbracht angesehen werden.

Wir wollen von nun an, zusätzlich zu den Symmetrievoraussetzungen (S_f) und (S_g) , Vorzeichenbedingungen an $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stellen:

(V) Es gilt $f(x, y)y \geq 0$ und $g(x)x \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Diese Bedingung (V) garantiert uns, daß für nichtnegative $\phi \in B$ auch $Z\phi$ eine nichtnegative Funktion aus B ist, daß also der Operator Z den Kegel $K := \{\phi \in B \mid \phi \geq 0\}$ invariant läßt. Ist $\phi \in K$ dann ein nichttrivialer Fixpunkt von Z , so ist ϕ monoton fallend, also insbesondere

$$\phi(0) > 0 \text{ und deshalb } \xi(t) = \int_0^t \phi(s) ds > 0, \quad 0 < t \leq 1,$$

so daß die zugehörige periodische Lösung u von (IV) mit $u|_{[0,1]} = \xi$ vom Typ (H_4) ist (vergl. Definition(1.2)).

Wir werden in den folgenden Resultaten eine Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Browder [5], die auf Horn [16] zurückgeht, sowie ein Verzweigungsergebnis von

Nussbaum [26] verwenden. Dazu benötigen wir die Begriffe des "ejektiven" und des "attraktiven" Fixpunktes.

(10.2) Definition (Browder [5])

Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und W eine offene Umgebung von x_0 . Ist $F: W \rightarrow X$ eine stetige Abbildung mit Fixpunkt x_0 , so nennen wir x_0 einen ejektiven Fixpunkt von F , wenn es eine offene Umgebung U_0 von x_0 gibt, so daß es für alle $x \in U_0 \setminus \{x_0\}$ ein $m = m(x) \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $F^m(x)$ definiert ist und $F^m(x) \notin U_0$ gilt.

In einem gewissen Sinne dual dazu definieren wir:

(10.3) Definition (Nussbaum [26])

Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ und W eine offene Umgebung von x_0 . Ist dann $F: W \rightarrow X$ eine stetige Abbildung mit Fixpunkt x_0 , so heißt x_0 attraktiver Fixpunkt von F , wenn es eine offene Umgebung U_0 von x_0 gibt, so daß es für jede offene Umgebung V von x_0 eine natürliche Zahl $m = m(V)$ gibt mit $F^j(U_0) \subset W$ für $0 \leq j \leq m$ und $F^j(U_0) \subset V$ für $j > m$.

Mit dem Browder - Horn'schen Fixpunktsatz (Horn [16]), nach dem ein vollstetiger Operator $F: C \rightarrow C$ einen nicht - ejektiven Fixpunkt besitzt, sofern C eine unendlich-dimensionale, abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge eines Banachraumes E ist, wollen wir nun das folgende Existenzresultat beweisen.

(10.4) Satz

Die stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mögen die Symmetrievoraussetzungen (S_f) und (S_g) sowie die Vorzeichenbedingung (V) erfüllen.

Es gebe ein $\varepsilon > 0$ und $k > \varepsilon$ sowie reelle Zahlen

$a_0, b_0, a_\infty, b_\infty \in \mathbb{R}^+$ mit

$$(10.4.1) \quad a_0 \frac{\pi}{2} + b_0 > \frac{\pi^2}{4} ,$$

$$(10.4.2) \quad a_\infty \frac{\pi}{2} + b_\infty < \frac{\pi^2}{4} ,$$

$$(10.4.3) \quad f(x,y) \geq a_0 y \quad \text{und} \quad g(v) \geq b_0 v \quad \text{für} \quad 0 \leq x, y, v \leq \varepsilon ,$$

$$(10.4.4) \quad f(x,y) \leq a_\infty y \quad \text{und} \quad g(v) \leq b_\infty v \quad \text{für} \quad x, y, v \geq k .$$

Dann besitzt die zeitverzögerte Differentialgleichung

$$(IV) \quad u''(t) + f(u(t-1), u'(t-1)) + g(u(t)) = 0$$

eine nichttriviale periodische Lösung.

Beweis

Die Behauptung des Satzes folgt aus dem Satz (10.1), dem Browder - Horn'schen Fixpunktsatz sowie aus den folgenden Lemmata.

(10.5) Lemma

Sind die Voraussetzungen (10.4.1) und (10.4.3) vom Satz (10.4) erfüllt, dann ist $0 \in K := \{\phi \in B \mid \phi \geq 0\}$ ein ejektiver Fixpunkt von $Z: K \rightarrow K$.

Beweis

Wir werden zeigen, daß es für jedes $\phi \in U_\varepsilon \setminus \{0\}$ mit $U_\varepsilon := \{\phi \in K \mid \|\phi\| < \varepsilon\}$ ein $m = m(\phi) \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß $Z^m(\phi) \notin U_\varepsilon$ gilt.

Angenommen, diese Behauptung wäre falsch. Dann gibt es also ein $\phi_0 \in U_\varepsilon \setminus \{0\}$, derart daß für alle n aus den natürlichen Zahlen gilt:

$$(*) \quad Z^n \phi_0 \in U_\varepsilon.$$

Definieren wir nun den Operator $\tilde{Z}: K \rightarrow K$ durch

$$\tilde{Z}\phi(t) = \int_t^1 a_0 \phi(1-s) + b_0 \xi(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\text{mit } \phi \in K \text{ und } \xi(s) = \int_0^s \phi(\tau) \, d\tau, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

so gilt wegen (10.4.3) für beliebige $\phi, \psi \in U_\varepsilon$, mit $\phi \leq \psi$:

$$\tilde{Z}\phi \leq \tilde{Z}\psi \leq Z\psi,$$

und deshalb wegen (*)

$$(**) \quad Z^n \phi_0 \in U_\varepsilon, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nun ist $\phi_1 := \tilde{Z}\phi_0$ monoton fallend und nicht negativ, deshalb gilt $\phi_1(0) > 0$. Aufgrund der Bedingung (10.4.1) muß aber entweder a_0 oder b_0 echt positiv sein. Daraus folgt, daß für die ebenfalls monoton fallende und nicht negative Funktion $\tilde{Z}\phi_1$

$$(\tilde{Z}\phi_1)'(1) = -a_0 \phi_1(0) - b_0 \int_0^1 \phi_1(s) \, ds < 0$$

gelten muß. Deshalb kann man ein $c > 0$ finden, so daß

$$\tilde{z}_{\phi_1}(t) \geq c \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1 \text{ gilt.}$$

Daraus erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(***) \quad \tilde{z}^{n+2}_{\phi_0} = \tilde{z}^{n+1}_{\phi_1} \geq \tilde{z}^n(c \cos(\frac{\pi}{2} \cdot)) :$$

$\tilde{z}^n(c \cos(\frac{\pi}{2} \cdot))$ können wir aber explizit ausrechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{z}(c \cos(\frac{\pi}{2} \cdot))(t) &= \int_t^1 a_0 c \cos(\frac{\pi}{2}(1-s)) + b_0 c \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\pi}{2} s) ds = \\ &= c \left(\frac{2a_0}{\pi} + \frac{4b_0}{\pi^2} \right) \cos(\frac{\pi}{2} t), \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

also haben wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{z}^n(c \cos(\frac{\pi}{2} \cdot)) = c \left(\frac{2a_0}{\pi} + \frac{4b_0}{\pi^2} \right)^n \cos(\frac{\pi}{2} \cdot).$$

Wegen unserer Voraussetzung (10.4.1) ist aber

$$\frac{2a_0}{\pi} + \frac{4b_0}{\pi^2} > 1. \text{ Daraus folgt: } \tilde{z}^n(c \cos(\frac{\pi}{2} \cdot))(0) \rightarrow \infty$$

für $n \rightarrow \infty$, was mit (***) zu einem Widerspruch zu (**) führt. Darum ist $o \in K$ ein ejektiver Fixpunkt von $Z: K \rightarrow K$.

Für die Anwendung des Browder - Horn'schen Fixpunktsatzes beim Beweis von Satz (10.4) benötigen wir noch eine unendlichdimensionale, abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge von K , die von Z invariant gelassen wird. Die liefert uns das folgende Lemma:

(10.6) Lemma

Sind die Voraussetzungen (10.4.2) und (10.4.4) von Satz (10.4) erfüllt, dann gibt es ein $w > 0$, derart daß

$$C_w := \{ \phi \in K \mid \phi \leq w \cos(\frac{\pi}{2} \bullet) \}$$

invariant ist unter Z , d.h es gilt $Z(C_w) \subset C_w$.

Beweis

Wegen der Bedingung (10.4.4) und da f und g stetig sind kann man ein $r > 0$ finden, so daß für alle $x, y, v \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$f(x, y) + g(v) \leq a_\infty y + b_\infty v + r.$$

Aus der Bedingung (10.4.2) folgt:

$$c_\infty := (1 - \frac{2a_\infty}{\pi} - \frac{4b_\infty}{\pi^2}) > 0,$$

deshalb können wir ein $w > 0$ finden, so daß für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$(*) \quad wc_\infty \cos(\frac{\pi}{2} t) \geq r (1-t).$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß C_w für ein solches w durch Z in sich abgebildet wird. Sei $\phi \in C_w$, dann gilt für $0 \leq s \leq 1$:

$$f(\xi(1-s), \phi(1-s)) + g(\xi(s)) \quad (\text{mit } \xi(s) = \int_0^s \phi(\tau) d\tau)$$

$$\leq a_\infty \phi(1-s) + b_\infty \xi(s) + r$$

$$\leq a_{\infty} w \cos\left(\frac{\pi}{2} (1-s)\right) + \frac{2b_{\infty}}{\pi} w \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) + r.$$

Deshalb erhalten wir für $0 \leq t \leq 1$:

$$Z\phi(t) \leq \int_t^1 a_{\infty} w \cos\left(\frac{\pi}{2} (1-s)\right) + \frac{2b_{\infty}}{\pi} w \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) + r \, ds$$

$$= \left(\frac{2a_{\infty}}{\pi} + \frac{4b_{\infty}}{\pi^2} \right) w \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + r (t-1)$$

$$\leq w \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \quad (\text{wegen } (*)).$$

Also gilt tatsächlich $Z\phi \in C_w$ und damit die Behauptung des Lemmas.

Wir wollen zum Abschluß die Van der Pol - Gleichung mit Verzögerung

$$(2) \quad u''(t) + a (1 - (u(t-1))^2) u'(t-1) + u(t) = 0, \quad a > 0,$$

im Hinblick auf die Existenz periodischer Lösungen untersuchen. Für (2) ist aber unsere Vorzeichenbedingung (V) nicht global erfüllt. Deshalb werden wir auch nur nachweisen können, daß für variierendes $a > 0$ nicht-triviale periodische Lösungen von (2) von der Nulllösung verzweigen. Dazu soll zunächst das folgende Lemma bewiesen werden, was in gewisser Weise dual zum Lemma (10.5) ist.

(10.7) Lemma

Die stetigen Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mögen die Symmetrievoraussetzungen (S_f) und (S_g) sowie die Vorzei-

chenbedingung (V) erfüllen.

Es gebe ein $\varepsilon > 0$ und reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit

$$(10.7.1) \quad a \frac{\pi}{2} + b < \frac{\pi^2}{4},$$

$$(10.7.2) \quad f(x, y) \leq a y \quad \text{und} \quad g(v) \leq b v \quad \text{für} \quad 0 \leq x, y, v \leq \varepsilon.$$

Dann ist $0 \in K = \{\phi \in B \mid \phi \geq 0\}$ ein attraktiver Fixpunkt von $Z: K \rightarrow K$.

Beweis

Da f und g stetig sind und $f(0, 0) = g(0) = 0$ gilt, gibt es ein $\delta > 0$, derart daß für alle

$$\phi \in U_0 := \{\phi \in K \mid \|\phi\| < \delta\}$$

und für $0 \leq s \leq 1$ folgt:

$$f(\xi(1-s), \phi(1-s)) + g(\xi(s)) < \varepsilon, \quad \text{mit} \quad \xi(s) = \int_0^s \phi(\tau) d\tau.$$

Für $\phi \in U_0$ und $0 \leq t \leq 1$ erhalten wir dann:

$$Z\phi(t) = \int_t^1 f(\xi(1-s), \phi(1-s)) + g(\xi(s)) ds \cdot (1-t) \\ \phi(t) := \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

Bezeichnet nun $\tilde{Z}: K \rightarrow K$ den Operator, der einem $\phi \in K$

$$\text{die durch} \quad \tilde{Z}\phi(t) := \int_t^1 a \phi(1-s) + b \xi(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

definierte Funktion $Z\phi \in K$ zuordnet, so gilt, wie man sich wegen (10.7.2) leicht überlegt:

$$(*) \quad z^{n+1} \phi \leq \tilde{z}^n \phi_\varepsilon = \left(\frac{2a}{\pi} + \frac{4b}{\pi^2} \right)^n \phi_\varepsilon \quad \text{für alle } \phi \in U_0, n \in \mathbb{N}.$$

Aus (10.7.1) folgt nun aber $\left(\frac{2a}{\pi} + \frac{4b}{\pi^2} \right) < 1$ und somit

$\|z^{n+1} \phi\| \leq \left(\frac{2a}{\pi} + \frac{4b}{\pi^2} \right)^n \varepsilon \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Da die Abschätzung $(*)$ unabhängig von $\phi \in U_0$ gültig ist, folgt hieraus die Behauptung des Satzes.

(10.8) Beispiel

Die Van der Pol - Gleichung mit Verzögerung:

$$(2) \quad u''(t) + a (1 - (u(t-1))^2) u'(t-1) + u(t) = 0, \quad a > 0.$$

Da $(1-x^2) < 0$ für $|x| > 1$ gilt, ist die Vorzeichenbedingung

(V) für (2) nicht erfüllt. Definieren wir

$$(1-x^2)_+ := \begin{cases} 1-x^2, & \text{falls } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und betrachten die Gleichung

$$(2_+) \quad u''(t) + a (1 - (u(t-1))^2)_+ u'(t-1) + u(t) = 0, \quad a > 0,$$

so ist die Vorzeichenbedingung (V) für (2_+) erfüllt.

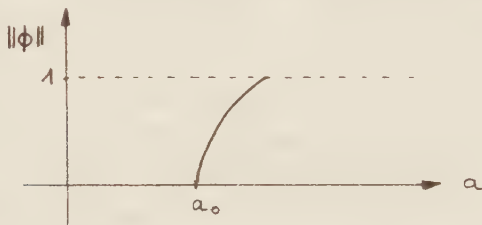
Außerdem ist jede periodische Lösung u von (2_+) eine periodische Lösung von (2), solange $\max_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| \leq 1$ gilt.

Wie man nun mit Hilfe der Lemmata (10.5) und (10.7)

leicht überprüft, ist $0 \in K$ ein attraktiver (bzw. ejektiver) Fixpunkt von $Z_a: K \rightarrow K$ mit

$$Z_a \phi(t) := \int_t^1 a (1 - (\xi(1-s))^2)_+ \phi(1-s) + \xi(s) ds, \quad a > 0, \\ 0 \leq t \leq 1,$$

wenn $a < a_0 := \frac{\pi^2 - 4}{2\pi}$ (bzw. $a > a_0$) gilt. Daraus folgt mit einem Verzweigungsergebnis von Nussbaum [26], daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a_\varepsilon \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ und ein $\phi_\varepsilon \in K \setminus \{0\}$ mit $\|\phi_\varepsilon\| < \varepsilon$ gibt, so daß $Z_{a_\varepsilon}(\phi_\varepsilon) = \phi_\varepsilon$ gilt. Für $\varepsilon \leq 1$ liefern uns diese Fixpunkte von Z_{a_ε} nicht-triviale periodische Lösungen von (2) für $a = a_\varepsilon$.



(10.9) Bemerkung

Grafton berichtet in [11] über numerische Experimente mit der Gleichung (2), allerdings für $a = -1$ und mit kleineren Delays, genauer: Er untersuchte die Gleichung

$$u''(t) + ((u(t-r))^2 - 1) u'(t-r) + u(t) = 0$$

für $r = 0,25; 0,5$ und $0,75$.

Die periodischen Zyklen, die dabei jeweils beobachtet wurden, hatten aber nicht die starken Symmetrieeigenschaften, die die periodischen Lösungen charakterisieren, welche wir durch unseren operatortheoretischen Ansatz gewinnen (vergl. Figure 2, [11]).

Erläuterungen zu einigen Notationen und Begriffen

Mengensymbole

C	Teilmenge (Gleichheit zugelassen)
$\cap$	Durchschnitt
U	Vereinigung
$X \setminus Y$	Komplement von Y in X
$X \times Y$	Kartesisches Produkt
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen

Abbildungen

id	Identitische Abbildung einer Menge X
f^n	n -te Iterierte von f ($f^0 := \text{id}$, $f^{n+1} := f \circ f^n$)
$f _A$	Einschränkung einer Abbildung auf eine Teilmenge A
$u'(t)$	bezeichnet die Ableitung von Funktionen mit reellem Argument

Normen

$ \cdot $	steht für den Betrag in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$
$\ \cdot\ $	Supremumsnorm auf Räumen stetiger Funktionen

Folgen

	Die Indexmenge von Folgen wie
(a_n)	ist stets $\mathbb{N}$

Spezielle Banachräume

$\mathbb{R}^n$	n -dimensionaler Euklidischer Raum
$C[a, b]$	Banachraum der stetigen Funktionen vom Intervall $[a, b]$ in die reellen Zahlen
	$(\xi, \phi \in C[a, b], \xi \leq \phi \iff \xi(t) \leq \phi(t) \text{ für } a \leq t \leq b)$

Definitionen

1. Sei E ein Banachraum, $A \subset E$ und $F: A \rightarrow E$ eine Abbildung. Dann heißt
 - (i) F kompakt, wenn $F(A) \subset E$ relativ kompakt ist.
 - (ii) F heißt vollstetig, wenn F stetig ist und $F(B) \subset E$ relativ kompakt ist für alle beschränkten Teilmengen $B \subset A$.
 - (iii) Ein linearer Operator $L: E \rightarrow E$ heißt kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel in E unter L relativ kompakt ist.
2. Ist X ein normierter Raum und $P \subset X$ eine abgeschlossene und konvexe Menge mit $P \cap -P = \{0\}$ und $tx \in P$ für alle $x \in P$ und $t \geq 0$, so heißt P ein Kegel in X .
3. Ist $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt
$$p := \inf\{a > 0 \mid u(t+a) = u(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$
die (minimale) Periode von u .
4. Eine Menge $f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$, stetiger Funktionen heißt eine stetige Schar, wenn die Abbildung
$$f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(\lambda, x) := f_\lambda(x), (\lambda, x) \in I \times \mathbb{R},$$
stetig ist.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Alt, Some periodicity criteria for functional differential equations, Manuscripta math. 23 (1978), 295 - 318
- [2] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Review 18 (1976), 620 - 709
- [3] N. Angelstorf, Periodische Lösungen einer nichtlinearen und autonomen Funktionaldifferentialgleichung, Diplomarbeit, Bonn (1978)
- [4] N. Angelstorf, Global branching and multiplicity results for periodic solutions of functional differential equations, in [36]
- [5] F.E. Browder, A further generalization of the Schauder fixed point theorem, Duke Math. J. 26 (1959), 291 - 303
- [6] S.-N. Chow, J.K. Hale, Periodic solutions of autonomous equations, J. Math. Anal. and Appl. 66 (1978), 495 - 506
- [7] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston (1966)
- [8] G. M. Dunkel, Single - species model for population growth depending on past history, in "Seminar on differential equations and dynamical systems", Springer Lecture Notes in Math. 60, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1968), 92 - 99

- [9] R. Grafton, A periodicity theorem for autonomous functional differential equations, J. Diff. Eq. 6 (1969), 87 - 109
- [10] R. Grafton, Periodic solutions of certain Liénard equations with delay, J. Diff. Eq. 11 (1972), 519 - 527
- [11] R. Grafton, Periodic solutions of Liénard equations with delay: some theoretical and experimental results, in "Delay and Functional Differential Equations and Their Applications", Ed. K. Schmitt, Academic Press (1972), 321- 334
- [12] K.P. Hadeler, Periodic solutions of $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$, Math. Meth. Appl. Sciences 1 (1979), 62 - 69
- [13] K.P. Hadeler, Delay equations in biology, in [36]
- [14] J.P. Hale, Theory of functional differential equations, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1977)
- [15] U. an der Heiden, Periodic solutions of a non-linear second order differential equation with delay, J. Math. Anal. Appl., erscheint
- [16] W.A. Horn, Some fixed point theorems for compact mappings and flows on a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 391 - 404
- [17] G.S. Jones, Periodic motions in Banach space and applications to functional differential equations, Contrib. Diff. Eq. 3 (1964), 75 - 106

- [18] H. Jürgens, H.-O. Peitgen, D. Saupe, Topological Perturbations in the Numerical Study of Nonlinear Eigenvalue and Bifurcation Problems, in "Analysis and Computation of Fixed Points", S.M. Robinson, ed., Academic Press, New York (1979)
- [19] J.L. Kaplan, J.A. Yorke, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations, J. Math. Anal. Appl. 48 (1974), 317 - 324
- [20] J.L. Kaplan, J.A. Yorke, On the non-linear differential delay equation $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$, J. Diff. Eq. 23 (1977), 293 - 314
- [21] M.A. Krasnoselskii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen (1964)
- [22] T. Laetsch, The number of solutions of a non-linear two point boundary value problem, Indiana U. Math. J. 20 (1970), 1 - 13
- [23] T.Y. Li, J.A. Yorke, Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 985 - 992
- [24] R.M. May, Stability and complexity in model ecosystems, Princeton University Press, Princeton (1973)
- [25] R.D. Nussbaum, Periodic solutions of some non-linear functional differential equations II, J. Diff. Eq. 14 (1973), 360 - 394

- [26] R.D. Nussbaum, A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations, J. Func. Anal. 19 (1975), 319 - 338
- [27] R.D. Nussbaum, Uniqueness and nonuniqueness for periodic solutions of $x'(t) = -g(x(t-1))$, J. Diff. Eq. 34 (1979), 25 - 54
- [28] R.D. Nussbaum, Global bifurcation of periodic solutions of some autonomous functional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 55 (1976), 699 - 725
- [29] R.D. Nussbaum, Differential - delay equations with two time lags, Memoirs of the AMS, Vol. 16, Issue 1, Number 205 (1978)
- [30] R.D. Nussbaum, Periodic solutions of special differential delay equations: an example in nonlinear functional analysis, Proc. Royal Soc. Edinburgh 81A (1978), 131 - 151
- [31] R.D. Nussbaum, Brief an H.-O. Peitgen (1977)
- [32] R.D. Nussbaum, Periodic solutions of nonlinear autonomous functional differential equations, in [36]
- [33] H.-O. Peitgen, M. Prüfer, The Leray - Schauder Continuation Method is a constructive Element in the Numerical Study of Nonlinear Eigenvalue and Bifurcation Problems, in [36]

- [34] H.-O. Peitgen, D. Saupe, K. Schmitt, Nonlinear elliptic boundary value problems versus their finite difference approximations: numerically irrelevant solutions, eingereicht bei J. Reine Angew. Math.
- [35] H.-O. Peitgen, K. Schmitt, Global topological perturbations in the study of nonlinear eigenvalue problems, Proc. Conf. "Numerical Solutions of Nonlinear equations", Springer Lecture Notes (1981)
- [36] H.-O. Peitgen, H.O. Walther, Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, Proc. Bonn (1978), Springer Lecture Notes in Mathematics, Bd. 730
- [37] H. Peters, Globales Lösungsverhalten zeitverzögerter Differentialgleichungen am Beispiel von Modellfunktionen, Dissertation, Bremen (1980)
- [38] H. Peters, Comportement chaotique d'une équation différentielle retardée, C. R. Acad. Sc. Paris 290 (1980), 1119 - 1122
- [39] A.S. Somolinos, Periodic solutions of the sunflower equation: $x'' + (\frac{a}{r})x' + (\frac{b}{r})\sin(x(t-r)) = 0$
Quart. of Appl. Math. 35 (1978),
465 - 477
- [40] H. Unger, G. Schröder, Praktische Mathematik II, Skriptum nach einer Vorlesung, Bonn (1967)

- [41] H.O. Walther, A theorem on the amplitudes of periodic solutions of differential delay equations with applications to bifurcation, J. Diff. Equa. 29 (1978), 396 - 404

- [42] H.O. Walther, Über Ejektivität und periodische Lösungen bei autonomen Funktionaldifferentialgleichungen mit verteilter Verzögerung, Habilitationsschrift, München (1977)

- [43] H.O. Walther, On a transcendental equation in the stability analysis of a population growth model, J. Math. Biol. 3, (1976) 187 - 195

L e b e n s l a u f

Familienname: Angelstorf

Vorname: Norbert

Geburtsdatum: 10.4.1952

Geburtsort: Dinslaken

Eltern: Wilhelm Angelstorf, Gertrud Angelstorf,
geb. Kamps

Schulbesuch: 1958 - 1963 Volksschule in Dinslaken
1963 - 1971 Otto-Hahn-Gymnasium in
Dinslaken

Reifeprüfung: Mai 1971 in Dinslaken

Universitätsbesuch: WS 1971 - SS 1972 Studium an der
PH-Ruhr, Abteilung Duisburg
WS 1972 - SS 1980 Studium der Mathe-
matik und Informatik an der Universi-
tät Bonn

Diplom-Hauptprüfung: 20.12.1978 in Bonn im Fach Mathematik
mit Nebenfach Informatik

wiss. Tätigkeit: seit 1.1.1979 wiss. Angestellter im
Sonderforschungsbereich 72 an der
Universität Bonn

Forschungsaufenthalt: Sept. 79 - Febr. 80 als Research
Scholar an der University of Utah,
Salt Lake City, USA

Eheschließung: am 1.8.1980 mit Annemarie Angelstorf,
geb. Bongartz aus Heinsberg

